

理论力学

第一章 拉格朗日方程

黄月新

大湾区大学

2026 年 3 月 5 日

理论力学是一门通过分析的手段研究系统的机械运动规律的课程。该课程涉及分析力学与刚体运动，主要内容包括最小作用量原理、拉格朗日力学、哈密顿力学。

第〇章 矢量力学

第一章 拉格朗日方程 (3 次课)

第二章 拉格朗日方程的应用 (3 次课)

第三章 哈密顿力学 (3 次课)

第四章 刚体的运动 (3 次课)

第五章 微振动 (2 次课)

第六章 非线性力学简介 (2 次课)

参考资料

- 秦敢，向守平，科学出版社，《力学与理论力学》[下册]
- Herbert Goldstein, Charles P. Poole and John Safko, Classical mechanics
- Landau, Lifshitz, Mechanics
- 维基百科 (wikipedia.org)

课程主页:

<https://gbuphys.team/Mechanics/index.html>

考核要求:

- 平时成绩 (10%)
- 作业 (20%)
- 期中考试 (20%)
- 完成一个报告 (15%)
- 期末考试 (35%)

现代物理学的框架

理论力学 $\rightarrow$ 电动力学 $\rightarrow$ 量子力学 $\rightarrow$ 统计力学

- 学会一种工具用于具体物理问题: **Mathematica, Python,**
- 深入理解拉格朗日力学和哈密顿力学, 能够正确建立和求解动力学方程
- 学会分析物理系统自由度、对称性和守恒量, 构建清晰的物理图像

第一章

质点动力学

约束和广义坐标

达朗贝尔原理和拉格朗日方程

总结

第一章

质点动力学

约束和广义坐标

达朗贝尔原理和拉格朗日方程

总结

什么是质点？

什么是动力学？

质点动力学

	牛顿-欧拉动力学（矢量力学）	拉格朗日-哈密顿动力学（分析力学）
核心思想	力是改变运动状态的原因，强调矢量平衡	优化律：自然界遵循“最小作用量原理”，系统选择作用量取极值的路径
基本物理量	矢量： $\vec{F}$ 、 $\vec{p}$ 、力矩、角动量	标量：动能 T 、势能 V 、拉格朗日量 $L = T - V$ 、哈密顿量 $H = T + V$
核心方程	$\vec{F} = m\vec{a}$	拉格朗日方程, 哈密顿方程
约束力	需显式求解，必须引入约束力并联立几何约束	自动消去理想约束，选取独立广义坐标即可降维
方程阶数与数量	二阶微分方程（ $3N$ 个分量，含约束则更多）	拉格朗日： n 个二阶标量方程；哈密顿： $2n$ 个一阶标量方程（ n 为自由度）
数学基础	欧几里得空间中的矢量代数和微积分	微分几何（位形空间/切丛）、辛几何（相空间/余切丛）
向现代物理的过渡	在相对论和量子领域失效，需大量修正	现代理论的基石：哈密顿形式 $\rightarrow$ 正则量子化；拉格朗日形式 $\rightarrow$ 费曼路径积分

牛顿力学常被视为基于‘力’的因果论 (causality) 描述，而基于最小作用量原理的分析力学则带有明显的目的论 (teleology)

质点动力学

- → 选择一个参考系

惯性系 (Inertial or Galilean system)

- 用 $\mathbf{r}$ 表示一个粒子的位置矢量, $\mathbf{v}$ 表示其速度

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}$$

- 动量

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

- 加速度

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

质点动力学

- → 选择一个参考系

惯性系 (Inertial or Galilean system)

- 用 $\mathbf{r}$ 表示一个粒子的位置矢量, $\mathbf{v}$ 表示其速度

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}$$

- 动量

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

- 加速度

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$$



牛顿的点记号, 也称为流数 (fluxion)

非惯性系

- 不满足牛顿第一定律
- 需要引进虚拟力

设 K 为惯性参考系, K' 为非惯性参考系, 某一时刻质点位于空间 P 点, 它相对于 K 系的坐标是 $\mathbf{r}$, 相对于 K' 坐标为 $\mathbf{r}'$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0(t) + \mathbf{r}'(t)$$

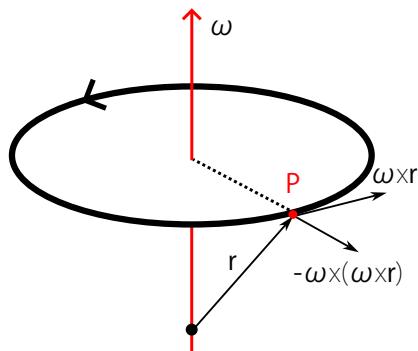
$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i}' + y'(t)\mathbf{j}' + z'(t)\mathbf{k}',$$

↑

考虑它们对时间的导数

非惯性系

认为 K' 只有转动没有平动



$$\frac{D\mathbf{i}'}{Dt} = \omega \times \mathbf{i}', \quad \frac{D\mathbf{j}'}{Dt} = \omega \times \mathbf{j}', \quad \frac{D\mathbf{k}'}{Dt} = \omega \times \mathbf{k}'$$

这里用 $\frac{D}{Dt}$ 表示绝对微分，用 $\frac{d}{dt}$ 表示相对微分

非惯性系

对于 K' 系的任意矢量

$$\frac{D\mathbf{r}'}{Dt} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$$

加速度

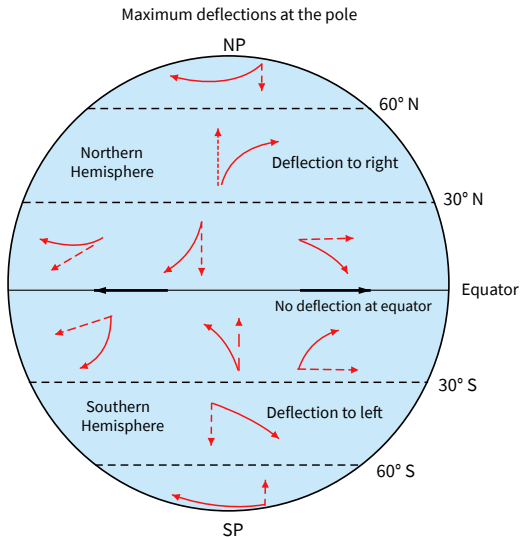
$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \frac{D}{Dt}(\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = \frac{D\mathbf{v}_0}{Dt} + \frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \frac{D\mathbf{r}'}{Dt} \\ &= \mathbf{a}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \right)\end{aligned}$$

若 P 点相对于 K' 系静止, 有

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$$

- 在非惯性系中, 为了用牛顿定律解释物理的运动, P 点不仅受力 $\mathbf{F}$, 还有一个虚拟的力 $\mathbf{f}_i$
- 在本例中, 这个虚拟力也叫惯性离心力: 垂直转轴, 指向离开转轴的方向

科里奥利力 (Coriolis force)(以后再介绍)



牛顿第二定律

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$$

- 惯性系/伽利略系
- 动量守恒：如果系统总的外力为零，则 $\dot{\mathbf{p}} = 0$ ，也就是动量守恒

角动量

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

扭矩 (torque, or moment of force)

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

对角动量进行微分

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}\mathbf{p} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

得到

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{L}}$$

总力矩为零 $\rightarrow$ 角动量守恒

动能

力 $\mathbf{F}$ 做功

$$W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

力 $\mathbf{F}$ 做功

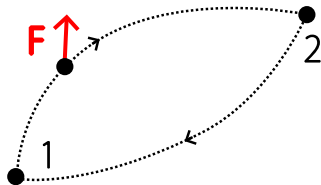
$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_1^2 m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt = \frac{m}{2} \int_1^2 \frac{d}{dt} v^2 dt = \frac{m}{2} (v_2^2 - v_1^2) \end{aligned}$$

- 标量 $T = mv^2/2$ 被称为动能

$$W_{12} = T_2 - T_1$$

力场做功等于动能的变化

保守力

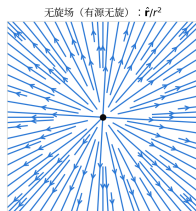


$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

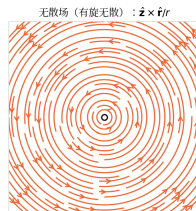
- 称为保守力 (conservative)
- 保守力做功不依赖于路径，只跟起点和终点有关
- 保守力做功只需要知道起点和末点：

$$W_{12} = V_1 - V_2$$

Helmholtz decomposition



$\nabla \times \mathbf{F} = 0$ ：环量恒为零；场线只由“散度源” $\nabla \cdot \mathbf{F}$ 决定



$\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ ：通量恒为零；场线绕“旋度源” $\nabla \times \mathbf{F}$ 闭合

任意光滑矢量场可以表示成

$$\mathbf{F} = -\nabla\Phi + \nabla \times \mathbf{A}$$

- $\nabla\Phi$ 称为无旋场，也叫纵向场

电场、万有引力场

- $\nabla \times \mathbf{A}$ 称为无散场，也叫横向场

磁场

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

- 称为保守力 (conservative)

把一个粒子通过任何路径带回原点，做的净功为零

- 势能 (potential, or potential energy)

$$\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r})$$

$V(\mathbf{r})$ 不唯一，任意常数不改变力的形式

- 保守力做功不依赖于路径，只跟起点和终点有关
- 保守力做功只需要知道起点和末点：

$$W_{12} = V_1 - V_2$$

从而

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

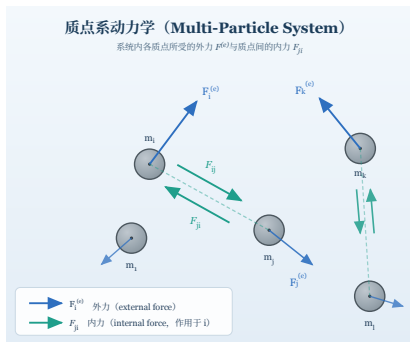
只受到保守力作用的粒子，其总能量 $T + V$ 守恒

保守力场

以下哪些是保守力:

- 电场?
- 磁场?
- 重力?
- 摩擦力?
- 空气阻力?
- 科里奥利力?

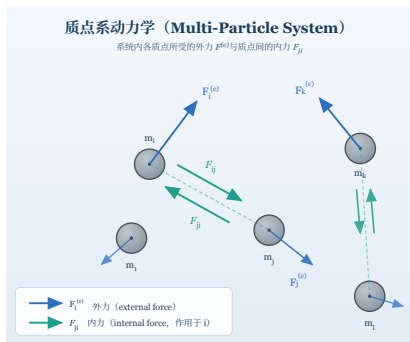
质心系统



$$\sum_j \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_i^{(e)} = \dot{\mathbf{p}}_i$$

- $\mathbf{F}_i^{(e)}$ 表示外力
- $\mathbf{F}_{ji}$ 表示第 j 个粒子施加给第 i 个粒子的力
- 牛顿第三定律的弱形式 (weak law of action and reaction): 等大、反向

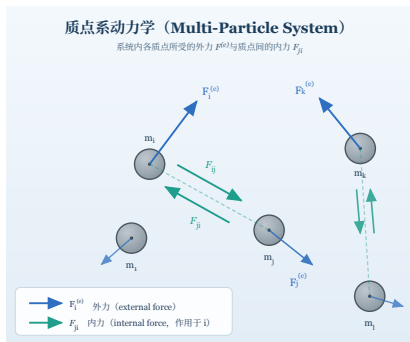
$$\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$$



$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{i,j} \mathbf{F}_{ji}$$

- $\mathbf{F}_i^{(e)}$ 表示外力
- $\mathbf{F}_{ji}$ 表示第 j 个粒子施加给第 i 个粒子的力
- 牛顿第三定律的弱形式 (weak law of action and reaction): 等大、反向

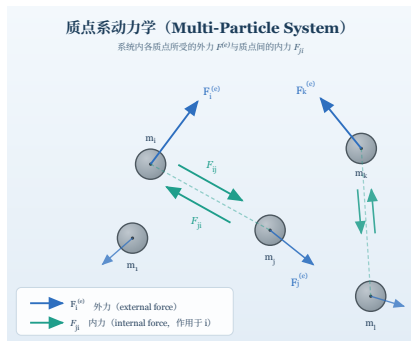
$$\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$$



$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{i,j} \mathbf{F}_{ji}$$

- $\mathbf{F}_i^{(e)}$ 表示外力
- $\mathbf{F}_{ji}$ 表示第 j 个粒子施加给第 i 个粒子的力
- 牛顿第三定律的弱形式 (weak law of action and reaction): 等大、反向

$$\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$$

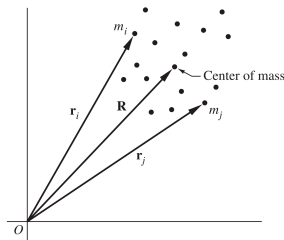


$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)}$$

- $\mathbf{F}_i^{(e)}$ 表示外力
- $\mathbf{F}_{ji}$ 表示第 j 个粒子施加给第 i 个粒子的力
- 牛顿第三定律的弱形式 (weak law of action and reaction): 等大、反向

$$\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$$

$$M \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} \equiv \mathbf{F}^{(e)}$$



- 质心的移动与外力有关，而内力不影响它的运动
- 动量 $\mathbf{P} = \sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = M \frac{d\mathbf{R}}{dt}$

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i}$$

Conservation theorem for the linear momentum of a system of particles: if the total external force is zero, the total linear momentum is conserved

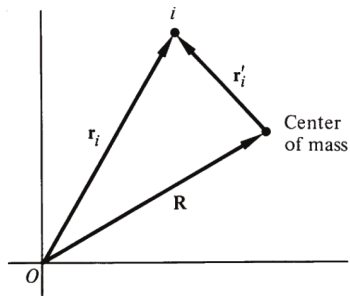
$$\sum_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_i \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) = \dot{\mathbf{L}} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{i,j} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji}$$

- 牛顿第三定律的强形式 (strong law of action and reaction): 等大、反向、共线
- 总角动量满足

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}^{(e)}$$

Conservation theorem for total angular momentum: $\mathbf{L}$ is constant in time if the applied external torque is zero

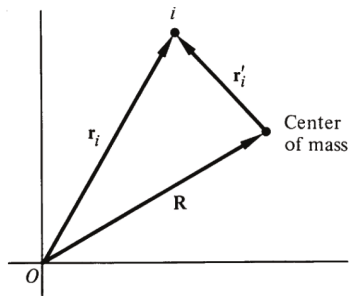
质心系角动量



$$L = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$$

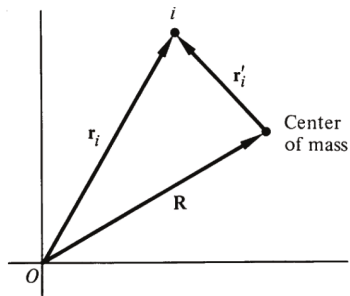
$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \mathbf{R}, \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{R}}{dt}, \quad \mathbf{v}'_i = \frac{d\mathbf{v}'_i}{dt}$$

质心系角动量



$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{R} \times m_i \mathbf{v} + \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i + \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{v} + \mathbf{R} \times \frac{d}{dt} \sum_i m_i \mathbf{r}'_i$$

质心系角动量



$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \times M\mathbf{v} + \sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{p}'_i$$

- 总角动量包括：质量集中在质心的角动量 + 绕质心运动的角动量
- $\mathbf{L}$ 依赖于原点的选取

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{v}_i + \mathbf{v}'_i) \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{v}'_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i v^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2 + \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \\ &= \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2 \end{aligned}$$

- 所有质量集中在质心的动能
- 绕质心运动的动能

- 如果外力是保守力，即可以表示成势能的梯度

$$\sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i^{(e)} \cdot d\mathbf{r}_i = - \sum_i \int_1^2 \nabla_i V_i \cdot d\mathbf{r}_i = - \sum_i V_i \Big|_1^2$$

- 如果 $\mathbf{F}_{ij}$ 也是保守力，且满足牛顿第三定律的强形式

$$V_{ij} = V_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$$

同时

$$\mathbf{F}_{ji} = -\nabla_i V_{ij} = \nabla_j V_{ij} = -\mathbf{F}_{ij}$$

总的内力势场

$$- \int_1^2 (\nabla_i V_{ij} \cdot d\mathbf{r}_i + \nabla_j V_{ij} \cdot d\mathbf{r}_j)$$

- 如果外力是保守力，即可以表示成势能的梯度

$$\sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i^{(e)} \cdot d\mathbf{r}_i = - \sum_i \int_1^2 \nabla_i V_i \cdot d\mathbf{r}_i = - \sum_i V_i \Big|_1^2$$

- 如果 $\mathbf{F}_{ij}$ 也是保守力，且满足牛顿第三定律的强形式

$$V_{ij} = V_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$$

同时

$$\mathbf{F}_{ji} = -\nabla_i V_{ij} = \nabla_j V_{ij} = -\mathbf{F}_{ij}$$

总的内力势场

$$-\frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_1^2 \nabla_{ij} V_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij} \Big|_1^2$$

定义总的势场

$$V = \sum_i V_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij}$$

- 对于保守场，力场做功可以表示成

$$W_{12} = V_1 - V_2$$

- $T + V$ 是守恒量

第一章

质点动力学

约束和广义坐标

达朗贝尔原理和拉格朗日方程

总结

约束和广义坐标

- 自由运动

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_i^e, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

- 非自由运动

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_i^e + \mathbf{R}_i$$

$\mathbf{R}_i$ 是保证第 i 个质点服从某种给定约束形式的约束力

约束 (Constraints)

完整 (holonomic) 约束

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots; t) = 0$$

约束 (Constraints)

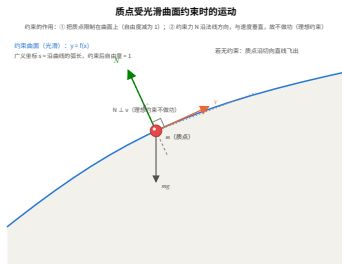
完整 (holonomic) 约束

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots; t) = 0$$

例子:

- 刚体上任意两个点
- 圆环上的质点
- 单摆
- 粒子在平面/曲面中的运动

约束 (Constraints)



N 个质点组成的系统，存在 k 个完整约束

$$f_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

- 自由度： $3N - k$
- 牛顿力学需要解 $3N + k$ 个二阶微分方程

约束

约束方程不仅跟位置有关，还跟速度有关

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N; \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N; t) = 0$$

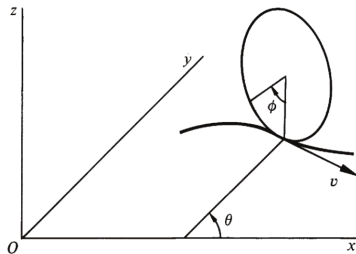
叫做微分约束

- 微分约束如果有可积性，可以转化为完整约束。如

$$\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{v}_0$$

- 非完整 (nonholonomic) 约束

约束

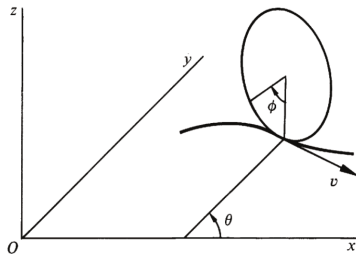


$$v = a\dot{\phi}, \quad \dot{x} = v \sin \theta, \quad \dot{y} = -v \cos \theta$$

得到

$$dx - a \sin \theta d\phi = 0, \quad dy + a \cos \theta d\phi = 0$$

约束



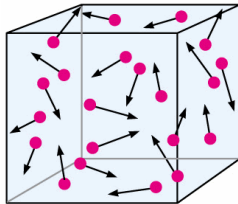
$$v = a\dot{\phi}, \quad \dot{x} = v \sin \theta, \quad \dot{y} = -v \cos \theta$$

得到

$$dx - a \sin \theta d\phi = 0, \quad dy + a \cos \theta d\phi = 0$$

找不到一个函数 $f(x, y, \theta, \phi)$ 来表示这个约束形式 $\rightarrow$ 非完整约束

非完整约束



- 非完整约束可以包含更高阶的微分形式，可以是不等式，
- 非完整约束没有一般性的处理方法
- 现实中，碰到的大多数都是非完整约束

ably assumed that any constraint, if present, is holonomic. This restriction does not greatly limit the applicability of the theory, despite the fact that many of the constraints encountered in everyday life are nonholonomic. The reason is that the entire concept of constraints imposed in the system through the medium of wires or surfaces or walls is particularly appropriate only in macroscopic or large-scale problems. But today physicists are more interested in atomic and nuclear problems. On this scale all objects, both in and out of the system, consist alike of molecules, atoms, or smaller particles, exerting definite forces, and the notion of constraint becomes artificial and rarely appears. Constraints are then used only as mathematical idealizations to the actual physical case or as classical approximations to a quantum-mechanical property, e.g., rigid body rotations for “spin.” Such constraints are always holonomic and fit smoothly into the framework of the theory.

广义坐标 (generalized coordinates)

- 约束使得坐标 r_i 不再具有独立性
- 假设 N 个质点的体系, 受到 k 个完整约束, 自由度为 $s = 3N - k$

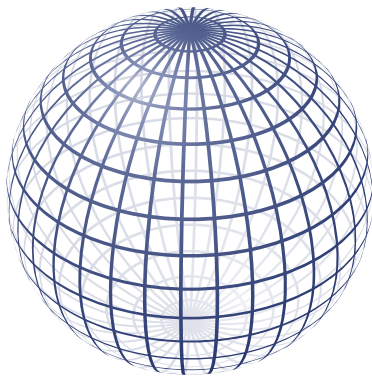
$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(q_1, q_2, \dots, q_s; t)$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(q_1, q_2, \dots, q_s; t)$$

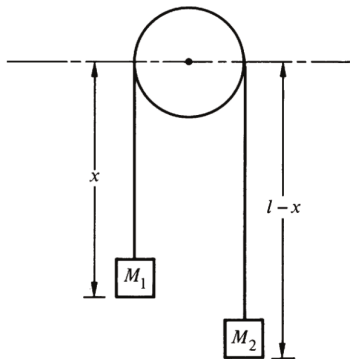
$$\mathbf{r}_N = \mathbf{r}_N(q_1, q_2, \dots, q_s; t)$$

- $q_1, q_2, \dots, q_s$ 为独立变量
- 所有的约束关系都体现在以上的转换方程中
- q_i 不一定需要具有位置量纲

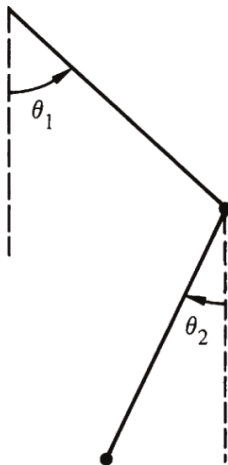
广义坐标张成的 s 维空间, 称为[位形空间](#)



球面上的运动



滑轮



双摆

广义坐标

- 广义坐标的选取有无穷多种
 - 选取的原则主要是使得问题简单化、直观
 - 具备一定的物理意义
- 独立性、完备性、相容性

广义速度

- 广义坐标对时间的一阶导数称为广义速度
- 量纲
- $\rightarrow$ 广义力、广义动量

第一章

质点动力学

约束和广义坐标

达朗贝尔原理和拉格朗日方程

总结

达朗贝尔原理 (D'Alembert's principle) 和拉格朗日方程

虚位移 (virtual displacement)

质点在某时刻某位置**假想**的满足约束条件的任意**无限小位移**，称为该质点在此时此刻的虚位移

- 一般用 $\delta \mathbf{r}_i$ 表示虚位移
- 虚位移是假想的，与实位移不同，它的存在不需要经历时间
- 虚位移不一定实际发生，它是约束允许的位移形式

Wikipedia: In analytical mechanics, a branch of applied mathematics and physics, a virtual displacement (or infinitesimal variation) $\delta \mathbf{r}$ shows how the mechanical system's trajectory can hypothetically (hence the term virtual) deviate very slightly from the actual trajectory of the system **without violating the system's constraints.**

力在虚位移下所做的假想功称为虚功

$$\delta W = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_i (\mathbf{F}_i^{(e)} + \mathbf{R}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i$$

- 理想约束

$$\sum_i \mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

- 光滑曲面约束
- 刚性约束
- 接触约束

受约束质点系中每一个质点的运动方程满足

$$\mathbf{F}_i^{(e)} + \mathbf{R}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = 0$$

从而有

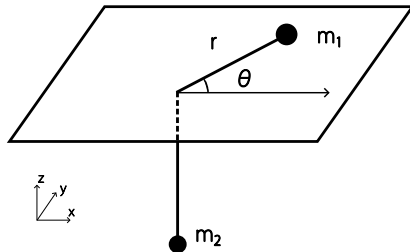
$$\delta W = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i - \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

在理想约束中，系统平衡时得到

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

虚功原理：系统平衡的条件是，外力对应的虚功为零

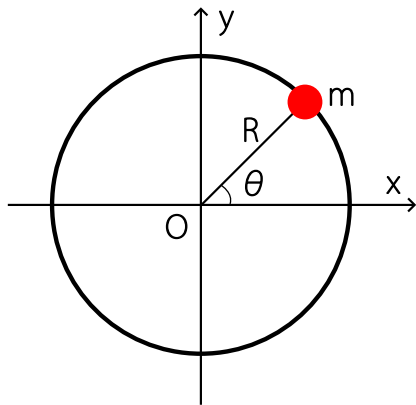
例子 1.1



- 质点位置: $\mathbf{r}_1 = r\mathbf{e}_r$, $\mathbf{r}_2 = z\mathbf{e}_z = -(l - r)\mathbf{e}_z$
- 虚位移

$$\delta\mathbf{r}_1 = \delta r\mathbf{e}_r + r\delta\theta\mathbf{e}_\theta, \quad \delta\mathbf{r}_2 = \delta z\mathbf{e}_z = \delta r\mathbf{e}_z$$

例子 1.2



$$\sum_i \left(\mathbf{F}_i^{(e)} - \dot{\mathbf{p}}_i \right) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

- 不显含约束
- 是否可以得到 $\mathbf{F}_i^{(e)} - \dot{\mathbf{r}}_i = 0$?

不能。因为 $\delta \mathbf{r}_i$ 的各分量并不独立

- 表示成广义坐标

达朗贝尔原理

利用链式法则

$$\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}$$

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

- 注意: $\delta \mathbf{r}_i$ 没有 δt 相关项

利用链式法则

$$\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}$$

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

- 注意: $\delta \mathbf{r}_i$ 没有 δt 相关项

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i,j} \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \equiv \sum_j Q_j \delta q_j$$

$$\sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i,j} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$\begin{aligned}\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} &= \sum_i \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \right] \\&= \sum_i \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} \right] \\&= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right)\end{aligned}$$

达朗贝尔原理

$$\sum_j \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) - Q_j \right\} \delta q_j = 0$$

得到

$$\sum_j \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right\} \delta q_j = 0$$

即为达朗贝尔原理 (D'Alembert's principle)

达朗贝尔原理

如果系统约束是完整的，可以找到一组独立广义坐标满足约束，则

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

如果系统约束是完整的，可以找到一组独立广义坐标满足约束，则

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

如果力场可以表示成 $\mathbf{F}_i = -\nabla_i V$ ，广义力

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_i \nabla_i V \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \rightarrow - \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

进一步可以化简

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0$$

拉格朗日方程

由于 V 不依赖于广义速度 $\dot{q}_j$, 则

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(T - V)}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial(T - V)}{\partial q_j} = 0$$

- 拉格朗日量 (Lagrangian, 也叫拉氏量): $L = T - V$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

第一章

质点动力学

约束和广义坐标

达朗贝尔原理和拉格朗日方程

总结

Summary