

理论力学

第二章 变分原理和拉格朗日方程

黄月新

大湾区大学

2026 年 10 月 7 日

理论力学是一门通过分析的手段研究系统的机械运动规律的课程。该课程涉及分析力学与刚体运动，主要内容包括最小作用量原理、拉格朗日力学、哈密顿力学。

第〇章 矢量力学

第一章 拉格朗日方程 (3 次课)

第二章 变分原理和拉格朗日方程 (3 次课)

第三章 哈密顿力学 (3 次课)

第四章 刚体的运动 (3 次课)

第五章 微振动 (2 次课)

第六章 非线性力学简介 (2 次课)

- 秦敢，向守平，科学出版社，《力学与理论力学》[下册]
- Herbert Goldstein, Charles P. Poole and John Safko, Classical mechanics
- Landau, Lifshitz, Mechanics
- 维基百科 (wikipedia.org)

课程主页:

<https://gbuphys.team/Mechanics/index.html>

考核要求:

- 平时成绩 (10%)
- 作业 (20%)
- 期中考试 (20%)
- 完成一个报告 (15%)
- 期末考试 (35%)

现代物理学的框架

理论力学 → 电动力学 → 量子力学 → 统计力学

- 学会一种工具用于具体物理问题：Mathematica, Python, ...
- 深入理解拉格朗日力学和哈密顿力学，能够正确建立和求解动力学方程
- 学会分析物理系统自由度、对称性和守恒量，构建清晰的物理图像

第二章

哈密顿原理

变分和泛函

总结

第二章

哈密顿原理

变分和泛函

总结

The motion of the system from time t_1 to time t_2 is such that the line integral (called the action or the action integral),

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L \, dt,$$

where $L = T - V$, has a stationary value for the actual path of the motion

- 驻值 (stationary value): 距离路径无限小的邻近路径的作用量相等

$$\frac{\delta I}{\delta q(t)} = 0$$

- 对于完整约束系统, 哈密顿原理是拉格朗日方程的充要条件

equations follow from Hamilton's principle, as being the more important theorem. That Hamilton's principle is a sufficient condition for deriving the equations of motion enables us to construct the mechanics of monogenic systems from Hamilton's principle as the basic postulate rather than Newton's laws of motion. Such a formulation has advantages: a) since the integral I is obviously invariant to

- 从现代物理的结构看，哈密顿原理更加基础，更容易推广
- 牛顿定律是：局部、瞬时、因果
- 哈密顿原理是：全局、路径、极值

	牛顿定律	哈密顿原理
基本对象	力 F	作用量 S
数学形式	微分方程	变分方程
	局部	整体
	$F = ma$	$\delta S = 0$
描述对象	瞬时状态	整条轨迹
	笛卡尔坐标最直观	广义坐标
约束处理	往往需要约束力	可以自然处理
坐标变换	相对麻烦	非常自然
对称性	不那么显式	非常显式
与现代物理的联系	较弱	极强

第二章

哈密顿原理

变分和泛函

总结

变分和泛函

- $y(x)$ 是 x 的函数, x 为自变量
- 以函数为自变量的函数 $\rightarrow J[y(x)]$ 称为泛函, 也称 $y(x)$ 为泛函的宗量
- 等时变分: 某条曲线 $y(x)$ 附近的另一条曲线 $y_1(x)$, 定义变分为 x 固定时两个函数的差,

$$\delta y(x) = y(x) - y_1(x)$$

泛函 $J[y(x)]$ 的变分是指上述变分 $\delta y(x)$ 引起 J 的变化

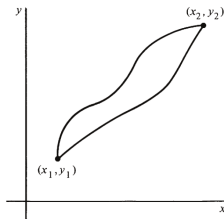
$$\delta J = J[y(x) + \delta y] - J[y(x)]$$

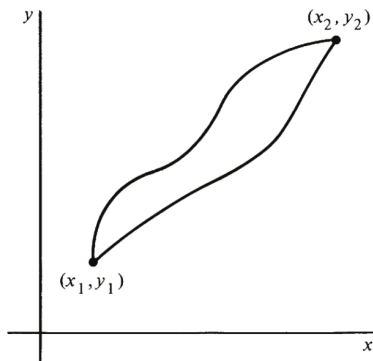
变分和泛函

问题：有一个函数 $f(y, \dot{y}, x)$ 定义在一个路径 $y = y(x)$ 上， x 取值在 x_1 和 x_2 之间，找到一条路径使得对函数 f 的积分

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y, \dot{y}, x) dx$$

取得它的驻值。



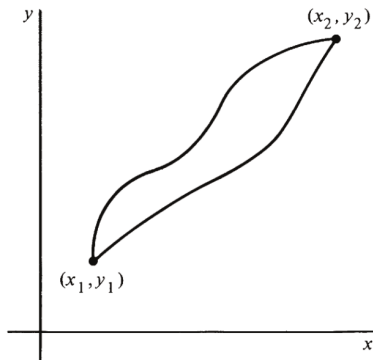


把问题简化，设

$$y(x, \alpha) = y(x, 0) + \alpha \eta(x), \quad \eta(x_1) = 0, \quad \eta(x_2) = 0$$

- α 为无穷小参数
- $y(x, 0)$ 是正确的轨道
- $y(x)$ 和 $\eta(x)$ 是光滑且没有奇点的函数

变分和泛函



把问题简化，设

$$y(x, \alpha) = y(x, 0) + \alpha \eta(x), \quad \eta(x_1) = 0, \quad \eta(x_2) = 0$$

则取得驻值的条件简化为

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{dJ}{d\alpha} &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} \right) dx \\&= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \alpha} \right) dx \\&= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right] dx \\&= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx \\&= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \eta(x) dx\end{aligned}$$

- 上面推导用到了分部积分

$$\rightarrow \delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \delta y dx = 0$$

例子

平面内的最短距离

$$I = \int_1^2 ds = \int_1^2 \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} dx$$

找两点的最短距离，即积分 I 最小，可以定义

$$f = \sqrt{1 + \dot{y}^2}$$

代入 $\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = 0$ 得到

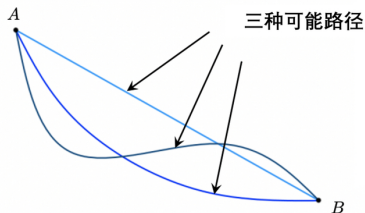
$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} \right) = 0$$

解此微分方程，得到

$$y = ax + b$$

- 轨迹是一条直线
- 常数 a 和 b 由两个端点确定

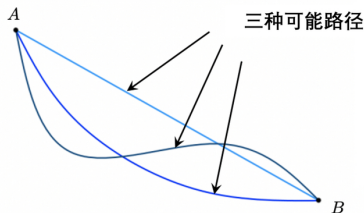
最速落径问题 (Brachistochrone problem)



一个质点静止从高处某一点滑落另一个低点，沿什么路径的用时最短

$T[y(x)] \leftarrow$ 泛函问题

最速落径问题 (Brachistochrone problem)



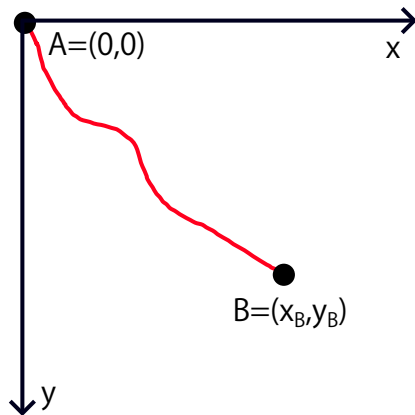
一个质点静止从高处某一点滑落另一个低点，沿什么路径的用时最短

$T[y(x)] \leftarrow$ 泛函问题

问题归结为求 $T[y]$ 的极小值曲线，变分问题

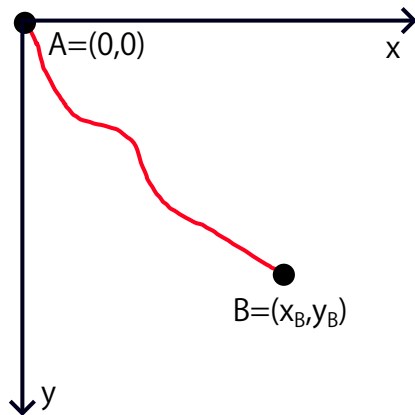
$$\delta T[y] = 0$$

最速落径问题



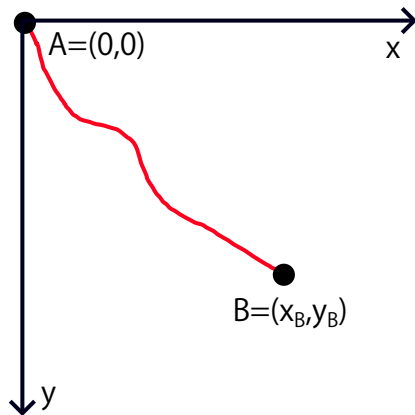
$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{2gy}}$$

最速落径问题



$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{2gy}} dx$$

最速落径问题



$$T[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_B} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx, \quad F(y, y') = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}$$

最速落径问题

欧拉-拉格朗日方程

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

得到

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+y'^2}{y^3}}, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y''}{\sqrt{y(1+y'^2)^3}} - \frac{y'^2}{2\sqrt{y^3(1+y'^2)}}$$

代入方程

$$\Rightarrow \frac{y''}{\sqrt{y(1+y'^2)^3}} - \frac{y'^2}{2\sqrt{y^3(1+y'^2)}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+y'^2}{y^3}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{y''}{1+y'^2} + \frac{1}{2y} = 0$$

最速落径问题

书上的解法:

$$y'' = \frac{dy'}{dy} y' = \frac{1}{2} \frac{dy'^2}{dy}$$

方程化为

$$\frac{1}{1+y'^2} \frac{dy'^2}{dy} + \frac{1}{y} = 0$$

把 y'^2 认为是一个整体, 解得

$$(1+y'^2)y = C_1 \rightarrow \frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{y}{C_1-y}}$$

最速落径问题

作参数化

$$y = C_1 \sin^2 \theta$$

则

$$\frac{y}{C_1 - y} = \frac{C_1 \sin^2 \theta}{C_1 - C_1 \sin^2 \theta} = \tan^2 \theta, \quad dy = C_1 \sin(2\theta) d\theta$$

$$dx = \sqrt{\frac{y}{C_1 - y}} dy = \tan \theta \cdot C_1 \sin(2\theta) d\theta = C_1 (1 - \cos \theta) d\theta$$

最后，得到

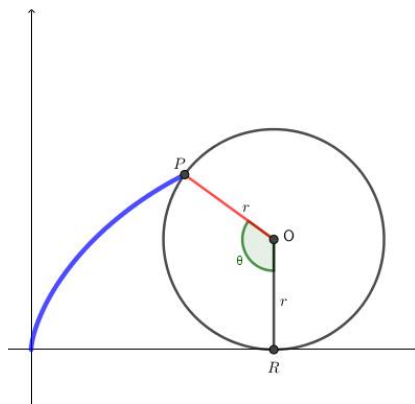
$$x = C_1 (\theta - \sin \theta), \quad y = C_1 \sin^2 \theta$$

它的轨迹是一条摆线 (cycloid)

另一种解法： F 不含 x ，因此有 $\frac{d}{dx} \left(F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = -\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ ，同时

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}, \quad F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = C$$

最速落径问题



$$x = \theta - \sin \theta, \quad y = 1 - \cos \theta$$

从哈密顿原理推导拉格朗日方程

假设一个函数 f :

$$f(y_1(x), y_1(x), \dots; \dot{y}_1(x), \dot{y}_2(x), \dots)$$

$y_1, y_2, \dots$ 是独立的广义坐标，考虑其作用量

$$J = \int_1^2 f(y_1(x), y_1(x), \dots; \dot{y}_1(x), \dot{y}_2(x), \dots) dx$$

按照哈密顿原理

$$\delta J = 0$$

每个广义坐标的轨迹都引入一个任意函数和参数 α

$$y_1(x, \alpha) = y_1(x, 0) + \alpha \eta_1(x),$$

$$y_2(x, \alpha) = y_2(x, 0) + \alpha \eta_2(x),$$

$$\vdots$$

- 其中 $y_i(x, 0)$ 是真实轨迹
- η_i 是独立的任意函数

J 对 α 的偏导数

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial \alpha} &= \int_1^2 \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \alpha} \right) dx \\ &= \int_1^2 \sum_i \left[\frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} \right] dx \\ &= \int_1^2 \sum_i \left[\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) \right] \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} dx\end{aligned}$$

所以

$$\delta J = \int_1^2 \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) \delta y_i dx$$

- y_i 是独立 $\rightarrow$ 拉格朗日方程

Euler-Lagrange differential equation

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} = 0$$

进行以下替换

$$x \rightarrow t$$

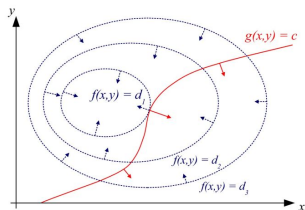
$$y_i \rightarrow q_i$$

$$f(y_i, \dot{y}_i, x) \rightarrow L(q_i, \dot{q}_i, t)$$

拉格朗日方程

如果广义坐标不独立?

拉格朗日乘子法 (Lagrange's multiplier)

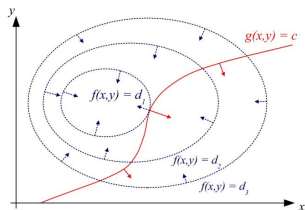


假设有自变量 x 和 y ，给定约束条件 $g(x, y) = c$ ，要求 $f(x, y)$ 在约束 g 下的极值。

- $g(x, y) = c$ 在平面内是一条曲线
- 当约束曲线 $g(x, y) = c$ 与某条等高线 $f(x, y) = d_1$ 相切 $\rightarrow$ 极值点
 $\rightarrow$ 两条曲线在切点出具有共线的发现

$$\delta f(x, y) \propto \delta g(x, y)$$

拉格朗日乘子法 (Lagrange's multiplier)



假设有自变量 x 和 y ，给定约束条件 $g(x, y) = c$ ，要求 $f(x, y)$ 在约束 g 下的极值。

定义拉格朗日乘子

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda [g(x, y) - c]$$

计算

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$$

- $\rightarrow$ 可以扩展到任意维度的函数

不独立的广义坐标

- 不管是达朗贝尔原理还是哈密顿原理，最后都要求广义坐标是独立的才能得到拉格朗日方程
- 如果虚位移 dq_i 与约束不匹配
- 现考虑 n 个广义坐标以及 m 个约束方程 f_α
- $\rightarrow$ 修改哈密顿原理的积分

$$I = \int_1^2 \left(L + \sum_{\alpha=1}^m \lambda_\alpha f_\alpha \right) dt$$

按照拉格朗日乘子法

$$\frac{\delta I}{\delta q_i} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial \lambda_i} = 0$$

一共得到 $n + m$ 个方程

不独立的广义坐标

对 q_i 的微分

$$0 = \delta I = \int_1^2 dt \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \sum_{\alpha=1}^m \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial q_i} \right) \delta q_i$$

- q_i 不是独立的，一般不能认为括号内的项等于 0

不独立的广义坐标

对 q_i 的微分

$$0 = \delta I = \int_1^2 dt \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \sum_{\alpha=1}^m \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial q_i} \right) \delta q_i$$

- 认为 $i = 1, \dots, m$ 的 δq_i 不独立，剩下的 $n - m$ 个坐标是独立的
- 对于 $i = 1, \dots, m$ ，总可以选择适当 λ_i 使得以下成立

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \sum_{\alpha=1}^m \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial q_i} = 0$$

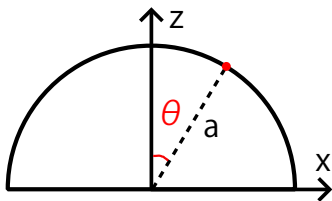
- 对于 $i = m + 1, \dots, n$ ，由于 δq_i 独立性本身就满足上面的方程

不独立的广义坐标

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = - \sum_{\alpha=1}^m \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial q_i} = Q_i$$

- Q_i 即为广义力
- 约束 $\rightarrow$ 外力对物体的限制，使其满足某种条件

例子：半球



小球从半球的顶部开始沿着球面下落，不考虑摩擦力

$$L = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) - Mgz \quad \text{with constraint} \quad f = x^2 + z^2 - a^2 = 0$$

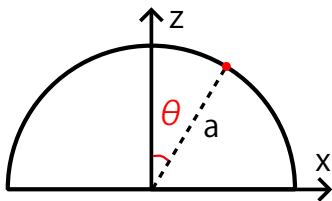
并定义

$$J = L + \lambda f = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) - Mgz + \lambda(x^2 + z^2 - a^2)$$

得到拉格朗日方程

$$M\ddot{x} - 2\lambda x = 0, \quad M\ddot{z} + Mg - 2\lambda z = 0$$

例子：半球



令 $x = a \sin \theta$, $z = a \cos \theta$, 从而

$$\ddot{x} = -a \sin \theta \dot{\theta}^2 + a \cos \theta \ddot{\theta}, \quad \ddot{z} = -a \cos \theta \dot{\theta}^2 - a \sin \theta \ddot{\theta}$$

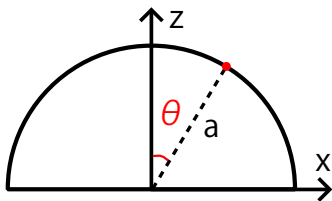
代入运动方程

$$\begin{aligned} -Ma \sin \theta \dot{\theta}^2 + Ma \cos \theta \ddot{\theta} - 2\lambda a \sin \theta &= 0 \\ -Ma \cos \theta \dot{\theta}^2 - Ma \sin \theta \ddot{\theta} + Mg - 2\lambda a \cos \theta &= 0 \end{aligned}$$

整理一下

$$\begin{aligned} Ma \ddot{\theta} - Mg \sin \theta &= 0 \\ Ma \dot{\theta}^2 + Mg \cos \theta - 2\lambda a &= 0 \end{aligned}$$

例子：半球



再整理一下

$$\frac{Ma}{2} \frac{\partial \dot{\theta}^2}{\partial \theta} - Mg \sin \theta = 0$$
$$Ma \dot{\theta}^2 + Mg \cos \theta - 2\lambda a = 0$$

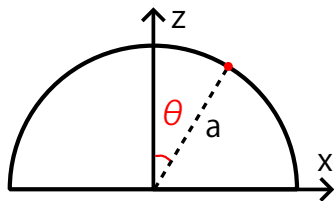
由第一个方程得到

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{a} (1 - \cos \theta)$$

代入第二方程，

$$2\lambda a = Mg(3 \cos \theta - 2)$$

例子：半球



当 $\lambda = 0$ 时,

$$\theta = \arccos \frac{2}{3}$$

此时小球会离开球面

半完整约束 (semi-holonomic constraints)

$$f_{\alpha}(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n; t) = 0$$

比如考虑 (常见的情况)

$$f_{\alpha} = \sum_{k=1}^n a_{\alpha k} \dot{q}_k + a_0$$

速度约束 (微分形式)

$$\sum_k^n a_{\alpha k} dq_k + a_0 dt = 0$$

半完整约束

构造虚位移：在同一时刻 ($\delta t = 0$) 假想的几何位移

$$\sum_{k=1}^n a_{\alpha k} \delta q_k = 0 \rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k = 0$$

- 对速度的约束直接转换成对虚位移的约束 (Chetaev's condition)
- 理想约束：约束力对任何符合约束的虚位移所做的功为零
- 为构造满足理想约束的力：引入拉格朗日乘子

$$Q_k = - \sum_{\alpha=1}^m \mu_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \dot{q}_k}$$

- 代入拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k = - \sum_{\alpha=1}^m \mu_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \dot{q}_k}$$

半完整约束

拉氏量

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z)$$

并满足约束

$$f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \dot{x}y^2 + x\dot{y} + kz = 0$$

得到运动方程

$$m\ddot{x} + \mu y^2 - \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad m\ddot{y} + \mu x - \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad m\ddot{z} - \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

- 四个方程，和四个待求 x, y, z, μ

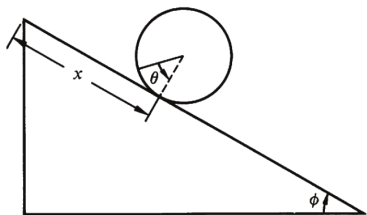
λ_l 有什么物理意义?

λ_l 有什么物理意义?

- 不管是理想约束还是半完整约束，一般性的拉格朗日方程都可以写为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q'_k$$

- λ_l 表示就是约束对系统的约束力



$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M(r\dot{\theta})^2 - Mg(l-x)\sin\phi \quad \text{with} \quad r d\theta = dx$$

设

$$L' = T + \lambda(r\dot{\theta} - \dot{x})$$

得到方程

$$M\ddot{x} - Mg\sin\phi - \lambda = 0, \quad Mr^2\ddot{\theta} + \lambda r = 0, \quad r\dot{\theta} = \dot{x}$$

解得

$$\lambda = -\frac{Mg\sin\phi}{2}, \quad \ddot{x} = \frac{g\sin\phi}{2}, \quad \ddot{\theta} = \frac{g\sin\phi}{2r}$$

- 重力势能一半转化成平动，一半转换成转动

变分原理的优势

- 包括完整约束的所有物理机制
- 不依赖于选择何种广义坐标
- 从变分原理，可以明确看到拉格朗日量不是确定的

例子 1

电池：电压是 V ，电感 L ，电阻 R

例子 1

电池：电压是 V ，电感 L ，电阻 R

$$L = \frac{1}{2}L\dot{q}^2 - qV, \quad \mathcal{F} = \frac{1}{2}R\dot{q}^2$$

拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}}$$

得到

$$L\ddot{q} + V = -R\dot{q} \rightarrow \dot{I} = -\frac{R}{L} \left(I + \frac{V}{R} \right)$$

如果给定初始条件 $I(0) = 0$ ，可解

$$I = \frac{V}{R} e^{-Rt/L} - \frac{V}{R}$$

例子 2

半径为 a 的小球在粘稠液体中下落，液体密度恒定，粘度为 η ，假定小球的有效质量为 m

例子 2

半径为 a 的小球在粘稠液体中下落，液体密度恒定，粘度为 η ，假定小球的有效质量为 m

$$L = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + mgy, \quad \mathcal{F} = 3\pi\eta a\dot{y}^2$$

运动方程

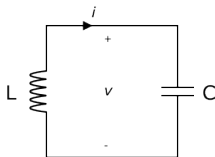
$$m\ddot{y} - mg = -6\pi\eta a\dot{y}$$

得到速度表达式

$$v = \frac{mg}{6\pi\eta a} \left(1 - e^{-\frac{6\pi\eta a}{m}t} \right)$$

例子 3

LC circuit: an inductance L and a capacitance C .



$$L = \frac{1}{2}L\dot{q}^2 - \frac{q^2}{C}$$

运动方程

$$L\ddot{q} + \frac{q}{C} = 0$$

例子 4

一个谐振子：弹簧、单摆

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

运动方程

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

- 简洁、紧凑

Lagrangian and Hamilton's principle form a **compact invariant** way of obtaining the mechanical equation of motion

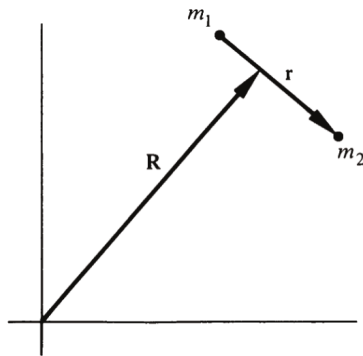
- 拓展性

变分原理不局限于经典力学，可以拓展电磁场 (Maxwell' equation)，量子力学

- 结构类比 (Structural analogy)

量子化 (quantization)

中心力场



U 是 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ 或者它的微分形式的函数:

$$L = T(\dot{\mathbf{R}}, \dot{\mathbf{r}}) - U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \dots)$$

中心力场问题

动能

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2'^2 \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\dot{\mathbf{r}}^2 \end{aligned}$$

- $\mathbf{R}$ 是循环坐标 $\rightarrow$ 总动量守恒
- 约化质量 (reduced mass)

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

- 两体问题 $\rightarrow$ 单体问题

中心力场问题

$$L = \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - V(r) = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

- 球对称，角动量守恒

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

- $\mathbf{r}$ 永远垂直于 $\mathbf{L}$ ，而 $\mathbf{L}$ 是常矢量
- θ 是循环坐标，对应的正则动量 (canonical momentum)

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

得到

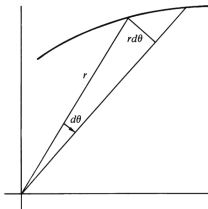
$$mr^2\dot{\theta} = l$$

中心力场问题

质量是常数，可以写成

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} \right) = 0$$

- $\frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$ 被称为面积速度：单位时间内半径对应的线段扫过的面积



$$dA = \frac{1}{2} r(r d\theta)$$

开普勒第二定律：在相等时间内，太阳和行星的连线扫过的面积相等

中心力场问题

对坐标 r 的运动方程

$$\frac{d}{dt}(\mu\dot{r}) - mr\dot{\theta}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0$$

令 $f(r) = -\partial V/\partial r$, 并利用角动量的运动积分, 可以得到

$$\begin{aligned} m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} &= f(r) \\ \Rightarrow m\ddot{r} &= -\frac{d}{dr} \left(V + \frac{1}{2} \frac{l^2}{mr^2} \right) \end{aligned}$$

中心力场问题

对坐标 r 的运动方程

$$\frac{d}{dt}(\mu\dot{r}) - mr\dot{\theta}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0$$

令 $f(r) = -\partial V/\partial r$, 并利用角动量的运动积分, 可以得到

$$\begin{aligned} m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} &= f(r) \\ \Rightarrow m\ddot{r} &= -\frac{d}{dr} \left(V + \frac{1}{2} \frac{l^2}{mr^2} \right) \end{aligned}$$

↓

左边对 t 的微分, 右边是对 r 的微分

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{l^2}{mr^2} + V \right) = 0$$

- 能量守恒

中心力场问题

- 两个参数: r 和 θ , 两个二阶微分方程需要四个积分
- 运动积分: 角动量和能量
- 简化成两个一阶微分方程:

$$mr^2\dot{\theta} = l, \quad \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2} + V = E$$

中心力场问题

进一步得到

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2} \right)} \Rightarrow dt = \frac{dr}{\sqrt{2(E - V - \frac{l^2}{2mr^2})/m}}$$

积分

$$t = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{2(E - V - \frac{l^2}{2mr^2})/m}}$$

角度的积分

$$\theta = l \int_0^t \frac{dt}{mr^2(t)} + \theta_0$$

- 需要四个常数: $E, l, r_0, \theta_0 \leftarrow$ 可以是其它参数吗?

中心力场问题

轨道问题: $r = r(\theta)$

中心力场问题

由角动量，可得

$$l \, dt = m r^2 \, d\theta \implies \frac{d}{dt} = \frac{l}{m r^2} \frac{d}{d\theta}$$

代入径向的运动方程

$$\frac{l}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{l}{m r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) - \frac{l^2}{m r^3} = f(r)$$

变两代换 $u = 1/r$

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{l^2} \frac{d}{du} V(1/u)$$

中心力场问题

另一个方程

$$\begin{aligned} dt &= \frac{dr}{\sqrt{2(E - V - \frac{l^2}{2mr^2})/m}} \\ \Rightarrow d\theta &= \frac{l dr}{mr^2 \sqrt{2(E - V - \frac{l^2}{2mr^2})/m}} \\ \Rightarrow \theta &= \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2mV}{l^2} - \frac{1}{r^2}}} + \theta_0 \\ \Rightarrow \theta &= - \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2mV}{l^2} - u^2}} + \theta_0 \end{aligned}$$

中心力场问题

考虑 V 是 r 的幂次函数

$$V = ar^{n+1}$$

则有

$$\theta = \theta_0 - \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2ma}{l^2}u^{-n-1} - u^2}} + \theta_0$$

- 当 $n = 1, -2, -3$ 时, 是可积的且可以用三角函数 (trigonometric functions) 表示
- 当 $n = 5, 3, 0, -4, -5, -7$ 时也具有可积性, 可以用椭圆函数 (elliptic functions) 表示
- 轨道是否封闭? $\rightarrow$ 伯特兰定理 (Bertrand's theorem)

$$n = 1, -2$$

中心力场：开普勒问题

当势能有以下形式：

$$f = -\frac{k}{r^2}, \quad V = -\frac{k}{r}$$

第二章

哈密顿原理

变分和泛函

总结

Summary

- 泛函和变分
- 哈密顿原理
- 约束和拉格朗日乘子法
- 中心力场问题

附录：中心力场问题

Binet 轨道方程，并设 $V = ar^{n+1} = au^{-(n+1)}$:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{l^2} \frac{d}{du} V(1/u) \rightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{ma(n+1)}{l^2} u^{-(n+2)}$$

- 找一个常数解
- 在这个解的附近展开 $\rightarrow$ 研究圆轨道附近的小扰动

$$u(\theta) = u_0$$

满足

$$u_0 = \frac{ma(n+1)}{l^2} u_0^{-(n+2)}$$

附录：中心力场问题

现在考虑圆轨道附近的微扰动

$$u(\theta) = u_0 + \eta(\theta), \quad |\eta| \ll u_0$$

1. 泰勒展开

$$(u_0 + \eta)^{-(n+2)} \approx u_0^{-(n+2)} - (n+2)u_0^{-(n+3)}\eta$$

2. 得到 η 的方程

$$\frac{d^2\eta}{d\theta^2} + (n+3)\eta = 0$$

解的形式

$$\eta(\theta) = A \cos(\sqrt{n+3}\theta + \phi)$$

附录：中心力场问题

一个周期内，角度变化为

$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{n+3}}$$

- $n = -2$: 万有引力
- $n = 1$: 谐振势
- 在微扰下可以证明这两种势场轨道封闭，但是不足以证明只有两个指数是封闭的