

Helmholtz 分解定理

矢量场的无旋—无散分解：数学结构与物理意义

由来. 1858 年, 亥姆霍兹 (H. Helmholtz) 在研究流体力学时指出: 任一足够光滑的矢量场都可以看成两类场的叠加——一类只冒”源”与”汇”而没有环流 (无旋, 文献中也称纵场、位场), 另一类只有环流而没有源 (无散, 文献中亦称横场、螺线场)。这个结论后来以他命名, 并且成为电动力学、流体力学与弹性波理论共同的数学骨架: 静电学是”无旋场”一半的世界, 静磁场是”无散场”一半的世界, 而电磁波恰是两半中各自无源的那两个横向模式。

1 数学结构与物理意义

1.1 定理的表述

设 $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是一个 C^2 矢量场 (文中加粗即矢量), 且在 $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ 时按不低于 $|\mathbf{x}|^{-2}$ 的量级衰减, 并设其散度、旋度也足够快地衰减 (这保证下面的积分收敛、分部积分的面项为零)。

定理 (Helmholtz 分解). 存在标量场 ϕ 与矢量场 $\mathbf{A}$, 使

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \nabla\phi(\mathbf{x}) + \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}) \quad (1)$$

其中 $\nabla \times \nabla\phi \equiv 0$ (无旋, 或”纵向”部分), $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv 0$ (无散, 或”横向”部分), 并且 $\mathbf{A}$ 可选取库仑规范 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 。显式构造为

$$\phi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' \quad (2)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}', \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (3)$$

这里 ∇' 表示对源点 $\mathbf{x}'$ 求导 ($\nabla' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}')$ 意为”把 $\mathbf{F}$ 的表达式中的自变量换成 $\mathbf{x}'$ 后再求散度”), 积分遍及全空间。注: 符号约定是自由的——若把两式改为 $\mathbf{F} = -\nabla\tilde{\phi} + \nabla \times \mathbf{A}$, 只需取 $\tilde{\phi} = -\phi$, 内容不变; 物理中静电场习惯写作 $\mathbf{E} = -\nabla V$ 即属此约定, §3.1 会再交代。 $1/(4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)$ 正是三维泊松方程的格林函数 (牛顿势)。

由 (2) (3) 立即读出一个关键事实: ϕ 只由散度 $\sigma \equiv \nabla \cdot \mathbf{F}$ 决定, $\mathbf{A}$ 只由旋度 $\boldsymbol{\omega} \equiv \nabla \times \mathbf{F}$ 决定。也就是说, 任一矢量场完全由两类”源”刻画:

$$\underbrace{\sigma = \nabla \cdot \mathbf{F}}_{\text{散度源 (电荷类)}} \quad \underbrace{\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{F}}_{\text{旋度源 (电流/涡类)}}$$

1.2 无旋场 ($\nabla \times \mathbf{F} = 0$) 对应什么?

数学刻画. 在单连通区域中 ($\mathbb{R}^3$ 自然是单连通的):

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0 \iff \mathbf{F} = \nabla \Phi \quad (\text{存在标量势 } \Phi).$$

由 Stokes 定理, $\oint_{\ell} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \iint_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = 0$ 对任意闭合回线成立, 故线积分与路径无关, ”场沿封闭回路的环量恒为零”正是无旋场的几何刻画。

物理对应: 无旋场是位场 (potential field), 它的场线从”源”发出、终止于”汇”, 像电荷产生的电力线; 它描述”压缩/守恒量的聚集”——质量、电荷、源密度 $\sigma = \nabla \cdot \mathbf{F}$ 决定了它的全部结构 ($\nabla^2 \Phi = \sigma$, 泊松方程)。它是”保守的”: 把一个粒子沿任何路径带回来, 做的净功为零 ($\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = 0$)。典型代表: 静电场 ($\nabla \times \mathbf{E} = 0$)、引力场、声学/弹性介质中的纵波 (压缩波, $\nabla \times \mathbf{u} = 0$, 却有 $\nabla \cdot \mathbf{u} \neq 0$, 密度涨落恰好由该部分描述)。一句话: 无旋场 = 源与汇的世界, 环量是它的禁区 ($\times F \ 0$)。

1.3 无散场 ($\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$) 对应什么?

数学刻画. 由 (1) 的推论: $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ 等价于 $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A}$, 即存在矢量势。(整空间 + 衰减条件下, 这是定理的另一表达: 此时 $\phi \equiv 0$, $\mathbf{A}$ 直接由 (3) 给出。) 由 Gauss 定理, 任意闭合曲面上的通量 $\oint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} d^3\mathbf{x}' = 0$, 即”穿出恰等于穿入”。

物理对应: 无散场是涡旋场, 场线首尾相接形成闭合曲线 (或无源无汇的环流), ”旋度源” $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{F}$ 是它的全部来源 ($\nabla^2 \mathbf{A} = -\boldsymbol{\omega}$, 库仑规范下仍是泊松方程)。它描述不可压缩的流动: 流体中 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ 即意味着体积元的体积不变、质量只绕转不聚集。典型代表: 磁场 ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, 磁单极不存在——磁感线永远闭合, 且直导线的 $\mathbf{B} = (\mu_0 I / 2\pi r) \hat{\phi}$ 完全是旋度场)、不可压缩流体的速度场、涡旋、横波 (剪切波, $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$)。一句话: 无散场 = 环流的世界, 源是它的禁区 ($\cdot F \ 0$)。

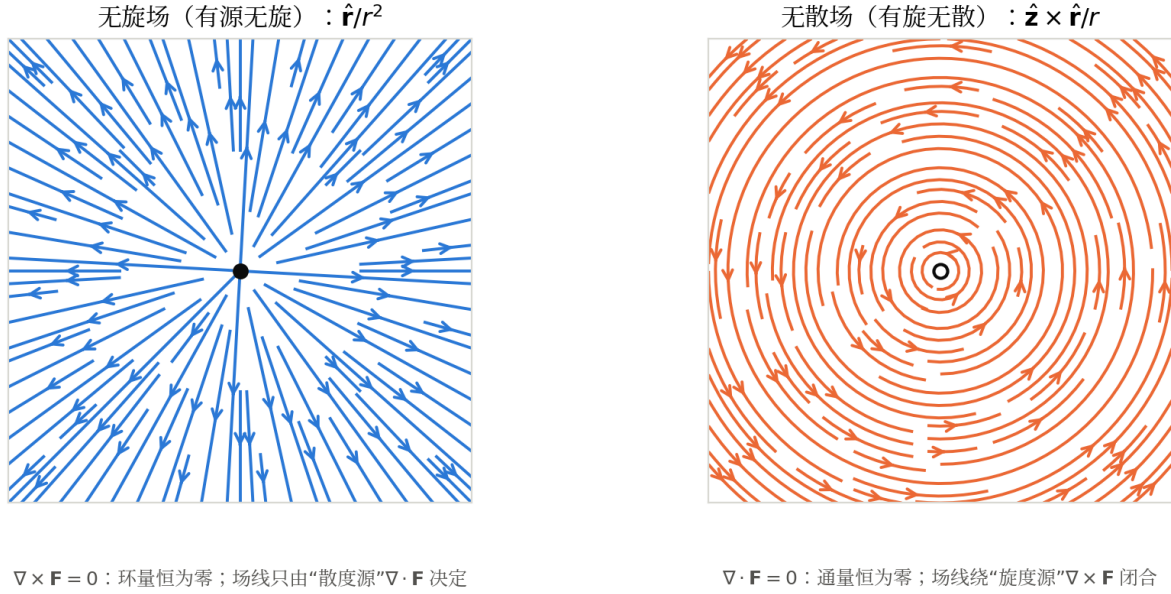


图 1：两类场各自的典型图像（二维截面）。左：无旋场 $\mathbf{F} = \hat{\mathbf{r}}/r^2$ ——场线从中心源呈辐射状发出，任意闭合回线的环量为零；右：无散场 $\mathbf{F} = \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{r}}/r$ ——场线绕涡心闭合，穿过任一闭合曲面的净通量恰为零。两者的“源”（实心点与空心点）分别是散度源与旋度源。

1.4 正交性：两部分互不干涉

我们把 $\mathbf{F}$ 视为 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ 中的矢量函数，内积 $\langle \mathbf{F}, \mathbf{G} \rangle = \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{G} \, d^3\mathbf{x}'$ 。则任意梯度场与任意无散场正交：

$$\begin{aligned} \int \nabla \phi \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \, d^3\mathbf{x}' &= \int \left[\nabla \cdot (\phi \nabla \times \mathbf{A}) - \phi \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \right] d^3\mathbf{x}' \\ &= \oint_{\partial \mathbb{R}^3} \phi (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

其中第一行用到 $\nabla(\phi \mathbf{G}) = \nabla \phi \cdot \mathbf{G} + \phi \nabla \cdot \mathbf{G}$ ($\mathbf{G} = \nabla \times \mathbf{A}$)，第二行用 $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} \equiv 0$ 及面项在无穷远处为零 ($\phi \sim 1/r$, $\nabla \times \mathbf{A} \sim 1/r^2$)。于是能量按平方和分解：

$$\int |\mathbf{F}|^2 \, d^3\mathbf{x}' = \int |\nabla \phi|^2 \, d^3\mathbf{x}' + \int |\nabla \times \mathbf{A}|^2 \, d^3\mathbf{x}',$$

即两部分的能量各自独立、互不相干——这就是“电荷只跟电荷”、“电流旋涡只跟旋涡”的数学表达。自由度核算：标量势 1 个 + 矢量势 3 个 - 规范自由度 1 个 ($\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \Lambda$ 与 $\mathbf{A}$ 给出同一无散场；(3) 的构造已自动满足 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ，把规范固定) = 3 个，恰好等于 $\mathbf{F}$ 的分量数——分解不增不减自由度。

极限情形与边界。若区域有界（例如管道内流动、空腔内的电磁场），

$$\mathbf{F} = \nabla\phi + \nabla \times \mathbf{A} + \mathbf{H},$$

还要补上调和场 $\mathbf{H}$ (同时满足 $\nabla \cdot \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{H} = 0$, 即每个分量都是调和函数), 它携带边界信息, 其存在性由区域的拓扑 (孔洞数) 与边界条件决定——这就是几何语言中的 Helmholtz–Hodge 分解。当区域取全空间且场衰减到零时, $\mathbf{H} \equiv 0$, 回到 (1)。

1.5 纵场与横场：同一分解的两种说法

中文译名. 给 (1) 的两支各添一个“按波矢命名”的名字: $\nabla\phi$ 一支即纵场 (longitudinal field, 亦译纵向场), $\nabla \times \mathbf{A}$ 一支即横场 (transverse field, 亦译横向场)。英文文献中同一对场的另两种叫法是 irrotational/potential field (无旋场/位场) 与 solenoidal field (螺线场, “无散场”的另一中文译名)。三组名字都是同一对场, 只是强调的侧面不同: 无旋/无散强调微分结构 (局部), 纵/横强调相对传播方向 (整体)。

为什么要把“纵”、“横”这两个字扣在它们头上? 相对而言——相对波矢 $\mathbf{k}$ (传播方向) 而言。取整场傅里叶变换 $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{k}) = \int \mathbf{F}(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}d^3\mathbf{x}'$, 求导即乘 $i\mathbf{k}$, 故

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0 \iff \mathbf{k} \times \hat{\mathbf{F}} = 0 \iff \hat{\mathbf{F}} \parallel \mathbf{k} \text{ (纵)}, \quad \nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \iff \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{F}} = 0 \iff \hat{\mathbf{F}} \perp \mathbf{k} \text{ (横)}.$$

于是 (1) 在傅里叶空间里只是单位分解:

$$\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{k}) = \underbrace{\hat{\mathbf{k}}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{F}})}_{\text{纵分量}} + \underbrace{\hat{\mathbf{F}} - \hat{\mathbf{k}}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{F}})}_{\text{横分量}}, \quad \delta_{ij} = \hat{k}_i \hat{k}_j + (\delta_{ij} - \hat{k}_i \hat{k}_j) \quad (5)$$

即 3 个分量 = 1 纵 + 2 横——两个横向自由度, 正对应电磁波的两个偏振方向 (§3.3、以及规范场论中“物理光子只有两个横向极化”)。一句话: “无旋/无散”是局部 (微分) 说法, “纵/横”是整体 (按波矢) 说法, 二者在整场加衰减条件下完全等价——同一枚硬币的两面。

两种语言、两列账本的对照表.

	纵场 (longitudinal)	横场 (transverse)
数学条件	$\nabla \times \mathbf{F} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$
傅里叶空间	$\hat{\mathbf{F}} \parallel \mathbf{k}$	$\hat{\mathbf{F}} \perp \mathbf{k}$
唯一携带的源	散度源 $\sigma = \nabla \cdot \mathbf{F}$	旋度源 $\omega = \nabla \times \mathbf{F}$
所用势	标量势 ϕ	矢量势 $\mathbf{A}$ ($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$)
场线形态	始于源、止于汇	闭合成环 (涡线)
自由度	1	2
物理代表	库仑电场、引力场; 声/弹性纵波 (P 波)	磁场、辐射电磁场; 剪切波 (S 波)

一个术语陷阱。“纵场/横场”容易让人联想到“纵波/横波”，但纵场不等于纵波：电荷的库仑场是纵场，却既不波动、也不辐射 (§3.3)；电磁辐射场是横场、以光速传播。P/S 波意义上的“纵波、横波”是波动方向用语，只是恰与场的纵横分解重合（P 波即“纵场波”、S 波即“横场波”，§3.4）。正确的理解是：纵/横描述场分量相对传播方向的几何，无旋/无散描述其微分结构；“纵场不辐射”是库仑规范下的物理内容，而不是“纵”字本身带来的。规范场论用同一语言：规范光子形式上有纵模与标量模，皆被高斯（库仑）约束消去，物理自由度只剩两个横向偏振——与上表“自由度 = 2”一致，这正是 §3.3 的场论版。

2 证明

2.1 总体思路

构造性证明，四步：格林函数（牛顿势）→ 矢量恒等式“劈开”拉普拉斯算子 → 分部积分把导数转到源点 $\mathbf{x}'$ 上 → 验证并证明唯一性。

2.2 第一步：牛顿势与 δ 函数

三维泊松方程的格林函数满足

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = -4\pi \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (6)$$

（对 $1/r$ 做两次求导：作为 ∇^2 的分布解，积掉单位球体积即得 $\int \nabla^2 \frac{1}{4\pi r} d^3\mathbf{x}' = -1$ ，仅源点处奇异。）对 $\mathbf{F}$ 作“矢量值的牛顿势”：

$$\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}', \quad (7)$$

由 (6) 交换积分与求导（换序由 $\mathbf{F}$ 的衰减条件保证——这是本证明要求衰减的根源），得

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{F}(\mathbf{x}') \nabla_{\mathbf{x}}^2 \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' = -\mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \text{即} \quad \mathbf{F} = -\nabla^2 \tilde{\mathbf{F}}. \quad (8)$$

2.3 第二步：用矢量恒等式劈开拉普拉斯

矢量恒等式（逐分量可验证：注意 $\nabla^2 = \partial_j \partial_j$ ， $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \nabla^2 \mathbf{V}$ ）

$$\nabla^2 \mathbf{V} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) \quad (9)$$

应用于 (8)：

$$\mathbf{F} = -\nabla(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{F}}) + \nabla \times (\nabla \times \tilde{\mathbf{F}}) = \nabla\phi + \nabla \times \mathbf{A}, \quad (10)$$

式中恰好令 $\phi \equiv -\nabla \cdot \tilde{\mathbf{F}}$ 、 $\mathbf{A} \equiv \nabla \times \tilde{\mathbf{F}}$ 。离 (1) 只差一步：把 ϕ 、 $\mathbf{A}$ 中的微分 ($\nabla \cdot$ 、 $\nabla \times$) 显式写出并转移到 $\mathbf{F}$ 本身上去。

2.4 第三步：分部积分显式化

利用 $\nabla_{\mathbf{x}}G = -\nabla_{\mathbf{x}'}G$ ($G = 1/4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ ，自身只依赖差 $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$)，以及乘积求导律，把作用于源点的梯度整体换到 G 上（即“积分中的散度换成散度积分 + 面项”，面项由于衰减而消失）：对 ϕ （先算 $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{F}}$ ）：

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{F}} &= \int (\nabla_{\mathbf{x}}G) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}') d^3\mathbf{x}' = - \int (\nabla_{\mathbf{x}'}G) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}') d^3\mathbf{x}' \\ &= - \int \left[\nabla' \cdot (G\mathbf{F}) - G \nabla' \cdot \mathbf{F} \right] d^3\mathbf{x}' = + \int G \nabla' \cdot \mathbf{F} d^3\mathbf{x}', \end{aligned} \quad (11)$$

其中 $\int \nabla' \cdot (G\mathbf{F}) d^3\mathbf{x}' = \oint_{\partial\mathbb{R}^3} G\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}' = O(R^{-1}) \rightarrow 0$ （球面 R 上 $G \sim 1/R$ 、 $\mathbf{F} \sim 1/R^2$ ）。同理（对每个分量，用 $\nabla_{\mathbf{x}}G \times \mathbf{F}$ 的积分恒等式）

$$\begin{aligned} \nabla \times \tilde{\mathbf{F}} &= \int (\nabla_{\mathbf{x}}G) \times \mathbf{F} d^3\mathbf{x}' = - \int (\nabla_{\mathbf{x}'}G) \times \mathbf{F} d^3\mathbf{x}' \\ &= - \int \left[\nabla' \times (G\mathbf{F}) - G \nabla' \times \mathbf{F} \right] d^3\mathbf{x}' = + \int G \nabla' \times \mathbf{F} d^3\mathbf{x}', \end{aligned} \quad (12)$$

面项同样消失。于是 $\phi = -\nabla \cdot \tilde{\mathbf{F}}$ 与 (2) 吻合、 $\mathbf{A} = \nabla \times \tilde{\mathbf{F}}$ 与 (3) 吻合，且 $\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot (\nabla \times \tilde{\mathbf{F}}) \equiv 0$ （库仑规范自动成立）。

2.5 第四步：验证重构

设 ϕ 、 $\mathbf{A}$ 由 (2) (3) 给出，先证两个泊松关系。对 (2) 作用 $\nabla_{\mathbf{x}}^2$ ，用 (6)：

$$\nabla^2\phi = -\frac{1}{4\pi} \int (\nabla' \cdot \mathbf{F})(-4\pi\delta) d^3\mathbf{x}' = \nabla \cdot \mathbf{F}; \quad \nabla^2\mathbf{A} = -\frac{1}{4\pi} \int (\nabla' \times \mathbf{F})(-4\pi\delta) d^3\mathbf{x}' = \nabla \times \mathbf{F}. \quad (13)$$

再考察残差 $\mathbf{R} \equiv \mathbf{F} - \nabla\phi - \nabla \times \mathbf{A}$ ：由 (13) 与 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ，

$$\nabla \cdot \mathbf{R} = \nabla \cdot \mathbf{F} - \nabla^2\phi = 0, \quad \nabla \times \mathbf{R} = \nabla \times \mathbf{F} - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \times \mathbf{F} - (\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}) = 0.$$

故每个分量调和： $\nabla^2 \mathbf{R} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{R}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{R}) = 0$ ；又由 (2) (3) 及分部微分， $\phi, \mathbf{A} = O(1/r)$ 、 $\nabla \phi, \nabla \times \mathbf{A} = O(1/r^2)$ ，故 $\mathbf{R} \rightarrow 0$ 。由调和函数均值性质：任取 $\mathbf{x}$ ，沿以 $\mathbf{x}$ 为心、半径 $R \rightarrow \infty$ 的球面平均，被均函数趋于为零，故 $|\mathbf{R}(\mathbf{x})| \leq \sup_{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|=R} |\mathbf{R}(\mathbf{y})| \rightarrow 0, \forall \mathbf{x}$ 。所以 $\mathbf{R} \equiv 0$ ，即 $\mathbf{F} = \nabla \phi + \nabla \times \mathbf{A}$ 。

2.6 第五步：唯一性

设另一组分解 $\mathbf{F} = \nabla \phi_2 + \nabla \times \mathbf{A}_2$ (同样 $\nabla \cdot \mathbf{A}_2 = 0, \phi_2, \mathbf{A}_2 \rightarrow 0$)。与 (1) 相减，令 $\psi = \phi - \phi_2, \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \mathbf{A}_2$ ，则 $\nabla \psi = \nabla \times \mathbf{A}'$ 。取散度： $\nabla^2 \psi = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}') \equiv 0$ ，且 $\psi \rightarrow 0$ ，由上一段的均值性质论证 $\psi \equiv 0$ 。于是 $\nabla \times \mathbf{A}' = 0$ ，在单纯连通的 $\mathbb{R}^3$ 中 $\mathbf{A}' = \nabla \chi$ ；再由 $\nabla \cdot \mathbf{A}' = 0$ 得 $\nabla^2 \chi = 0, \chi \rightarrow 0$ ，故 $\chi \equiv 0, \mathbf{A}' = 0$ 。唯一（在规范化 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \phi(+\mathbf{A}) \rightarrow 0$ 之下）。

注：若不要求 $\mathbf{A} \rightarrow 0$ 或 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ，则分解不再是唯一的——这正是“规范自由度”： $\mathbf{A}$ 可加任意 C^2 梯度的卷积补充（如 $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \Lambda$ 不改变 $\nabla \times \mathbf{A}$ ）， ϕ 可加常数。这些剩余自由度给“调和场”（性质同上： $\nabla \cdot \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{H} = 0$ ）留下了余量；这就是为什么有界区域需要补上 $\mathbf{H}$ （见 §1.4 末段），也是电动力学中“规范变换不改变物理场”的数学源头。

2.7 傅里叶空间的互补证明（呼应 §1.5）

把第二至四步换成傅里叶语言：求导即乘 $i\mathbf{k}$ ($\nabla \cdot \rightarrow i\mathbf{k} \cdot, \nabla \times \rightarrow i\mathbf{k} \times$)，且泊松方程的格林函数满足变换对 $\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \leftrightarrow \frac{1}{|\mathbf{k}|^2}$ ，故 (13) 化为代数方程：

$$\hat{\phi}(\mathbf{k}) = -\frac{\hat{\sigma}(\mathbf{k})}{|\mathbf{k}|^2}, \quad \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{k}) = \frac{\hat{\omega}(\mathbf{k})}{|\mathbf{k}|^2}, \quad \hat{\sigma} = i\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{F}}, \quad \hat{\omega} = i\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{F}}.$$

再用单位分解 (5) 一拼，即得整场的单行式：

$$\boxed{\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{k}) = -i \frac{\hat{\mathbf{k}} \hat{\sigma}(\mathbf{k})}{|\mathbf{k}|} + i \frac{\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\omega}(\mathbf{k})}{|\mathbf{k}|}} \quad (14)$$

逆变换第一项即 (1) 的纵场 $\nabla \phi$ ，第二项即横场 $\nabla \times \mathbf{A}$ （验证 $i\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{F}} = \hat{\omega}$ 、 $i\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{F}} = \hat{\sigma}$ 直接放行）。唯一性在此是“自动”的： $\mathbf{k} \neq 0$ 处两投影互不重叠； $\mathbf{k} = 0$ （即 $\int \mathbf{F} d^3x$ ）由衰减条件为零。结论：定理在傅里叶空间里只是一行恒等式，全部的“倒腾”都提前付给了格林函数 $1/|\mathbf{k}|^2$ ；这就是为什么给它起“纵/横”之名最自然——名字本来就生成在 $\mathbf{k} \parallel / \perp$ 的投影里。

3 简单应用

3.1 静电场：无旋场的一半，标量势

稳恒情形 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ ，电场是无旋场，故 $\mathbf{E} = -\nabla V$ （此处按物理惯例取负极号；与 (1) 记号对照： $V = -\phi$ ）。结合 Gauss 定律 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$ 得泊松方程 $\nabla^2 V = -\rho/\varepsilon_0$ ，其格林函数解（叠加原理的连续版本）就是 库仑定律的积分形式：

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}', \quad \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{x}')\hat{\mathbf{r}}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} d^3\mathbf{x}'.$$

点电荷 $\rho = Q\delta^3$ ： $V = Q/4\pi\varepsilon_0 r$ ， $\mathbf{E} = Q\hat{\mathbf{r}}/4\pi\varepsilon_0 r^2$ 。一句话：静电场整个住在“无旋”这半边，它的“源”只有电荷（散度源），没有旋度源，故 $\nabla \times \mathbf{E} \equiv 0$ 稳恒成立。

3.2 静磁场：无散场的一半，矢量势与毕奥-萨伐尔定理

$\nabla \cdot \mathbf{B} \equiv 0$ （磁荷不存在，磁感线永远闭合），磁场是无散场，故 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ；稳恒情形 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ （电流是旋度源），用库仑规范 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 得 $\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$ ，于是

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}', \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \implies \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') \times \hat{\mathbf{r}}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} d^3\mathbf{x}'.$$

后者即毕奥-萨伐尔定理。两者对照（本分解定理的直接说明）：

	静电	静磁
场的归属	无旋场	无散场
恒等式	$\nabla \times \mathbf{E} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
源	电荷（散度源）	电流（旋度源）
势	$\mathbf{E} = -\nabla V$	$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$
势满足	$\nabla^2 V = -\rho/\varepsilon_0$	$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$

3.3 电磁波的横波性：纵—横分解与辐射

时变情形两类场被麦克斯韦方程耦合（法拉第定律 $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$ 给电场“注入”旋度；电荷守恒与位移电流则给磁场注入与电荷相关的散度源）。库仑规范下把 $\mathbf{E}$ 分解（纵场、横场的定义与名称来源见 §1.5）：

$$\mathbf{E} = \underbrace{-\nabla V}_{\text{纵场 (无旋)}} + \underbrace{(-\partial \mathbf{A}/\partial t)}_{\text{横场 (无散)}},$$

V 满足瞬时的泊松方程 $\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0$: 电荷只产生无旋的”库仑场”, 它不波动、不携带辐射能量, 瞬时”告知”全空间的电荷分布(这正是库仑规范下辐射分离定理的表述); 而 $\mathbf{A}$ ($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, 整个就是无散场) 满足波动方程 $(\nabla^2 - \mu_0 \epsilon_0 \partial_t^2) \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}_\perp$ ($\mathbf{J}_\perp$ 为电流的横向分量), 由横向电流(加速电荷)激发、以光速传播。由此得两个著名结论: (1) 无源区域 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, 平面波 $\mathbf{E} \sim \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$ 要求 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0$ ——电磁波是横波, 偏振只有两个独立的横向极化方向, 正是无散场给出的两个自由度; (2) 库仑场的”瞬时超距”表象与辐射的”光速传播”是同一矢量场两半各自遵循不同方程的结果: 纵场是”关联”, 横场是”辐射”, 二者的能量正交互不干涉 (§1.4)。

3.4 流体力学: 势流与涡旋, P 波与 S 波

任一流动 $\mathbf{u} = \nabla \phi + \nabla \times \mathbf{A}$: 无旋部分(势流)对应声波/纵波——速度沿传播方向的压缩—稀疏扰动, $\nabla \times \mathbf{u} = 0$, 由”密度起伏”($\nabla \cdot \mathbf{u}$ 的源)支配; 无散部分对应涡旋(剪切波/横波, 术语见 §1.5)——涡量 $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ 完全由 $\mathbf{A}$ 携带, 不改变体积。对不可压缩流体 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ 退化为 $\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{A}$; 二维问题中 $\mathbf{A} = \psi \hat{\mathbf{z}}$, 一个标量流函数 ψ 就给出完整场(涡线即 $\psi = \text{等值线}$)。两部分的演化规律各不相同: 无粘流体中涡量满足 Kelvin 环路定理(涡管强度守恒、涡旋”冻结”随流体平动), 而声波以声速传播; 在固体弹性波理论中, 位移场 $\mathbf{u}$ 的纵分量 ($\nabla \times \mathbf{u} = 0$, P 波) 与横分量 ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, S 波) 各自按 $c_P = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ 、 $c_S = \sqrt{\mu/\rho}$ 的速度独立传播——地震仪记录到 P 波先于 S 波到达(远炮点), 以及 S 波在液核中传导受阻, 皆是这种”分解独立传播”的直接结果。工程/数值应用中, ”把任意速度场拆成纵 + 横”也是识别噪声、剥离数值杂波的标准手段(Helmholtz–Hodge 数值分解)。

参考资料

1. H. Helmholtz (1858), *Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen* (流体源码)。
2. J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd ed.: 矢量恒等式与格林函数 (§1.6), 库仑规范、纵横分解与辐射平移定理 (§6.3)。
3. D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*: 静电势(泊松解)、矢量势与毕奥–萨伐尔定理。
4. G. B. Arfken & H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, 7th ed.: 矢量恒等式、格林函数、泊松方程。
5. 梁昆淼, 《数学物理方法》: 泊松方程与格林函数(牛顿势)解。

6. 郭硕鸿《电动力学》：库仑规范下纵场（库仑场）与横场（辐射场）的分离及其物理含义。
7. M. E. Peskin & D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*: 规范势的横/纵/标量模，纵向模被高斯约束消去、物理光子只剩两个横向极化。
8. G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*: 涡动力学、势流与流体波的分解。
9. 本文插图由 `plot_helmholtz.py` 生成 (numpy + matplotlib)。