

最速落径问题

The Brachistochrone Problem

单位约定：长度 m，时间 s，高度 y m； $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ， y 轴竖直向下为正

引言¹

1696 年 6 月，约翰·伯努利 (Johann Bernoulli) 在《教师学报》(*Acta Eruditorum*) 上向全欧洲的数学家发出挑战：在重力作用下，一个质点从静止开始沿什么路径滑落，才能以最短时间从较高点到达较低点？他给这条待求曲线起名为 *brachistochrone*——源自希腊语 *brachistos* (最短) 加 *chronos* (时间)，中文即“最速落径”。

这是数学史上第一次明确地提出类似“在函数空间中求极值”的问题，是 **变分法的起点**。当时已年迈的牛顿据说当晚就解出此题并以匿名投递；伯努利看到匿名解法后留下名言：*tanquam ex ungue leonem*——“从爪痕认出狮子”。莱布尼茨、雅可比·伯努利、洛必达等也先后解出；其中洛必达利用了他的学生的结果，而雅可比·伯努利的做法另辟蹊径，为日后变分法的发展埋下伏笔。

在等待决出答案之前，最常见的猜测是“圆弧最快”——早在 1638 年伽利略就在《两门新科学的对话》中表达了类似的直觉。这一直觉是错的，而它的错误恰恰很有教益：圆弧在起点处的切线是水平的，真实的最速曲线在起点处却 竖直向下坠落——先尽快获取速度，再转平缓。这正是最速落径最迷人的地方：它反直觉地放弃了“直线最短”，用一次“深度换速度”的取舍取回了更短的时间。

目录

1 物理模型与变分提法	3
1.1 坐标系与物理假设	3
1.2 时间泛函	3
2 变分法求解	3
2.1 欧拉-拉格朗日方程	3
2.2 首次积分： F 不显含 x	4

¹本报告全部数据与插图由可执行文件 `brachistochrone.ipynb` 生成，运行即可复现（依赖 `numpy`、`scipy`、`matplotlib`）。

目录	2
2.3 参数化解：摆线	4
2.4 端点匹配与最短时间	4
2.5 光学类比：伯努利的原始解法	5
2.6 注记：摆线的等时性	5
3 数值独立验证：直接离散化优化	6
3.1 离散化与解析梯度	6
3.2 结果对照 ($B = (1, 1)$, $N = 40$)	6
3.3 收敛性与误差来源	8
4 分情况讨论：不同落点 B 处的曲线形态与用时	9
4.1 三种形状区间	9
4.2 四个落点对照	9
4.3 与直线用时之比	10
5 结论	11

1 物理模型与变分提法

1.1 坐标系与物理假设

设起点为点 $A = (0, 0)$, 终点为点 $B = (x_B, y_B)$, 其中 $x_B > 0$ 、 $y_B > 0$, y 轴竖直向外(下方)为正。质点质量 m 、带符号的势能 $V = -mgy$ 。假设:

1. 轨道光滑、无摩擦(理想约束);
2. 质点自静止出发: $v(0) = 0$;
3. 重力为唯一切向驱动力。

1.2 时间泛函

机械能守恒(势能 mgy 的差成为动能: $\frac{1}{2}mv^2 = mgy$) 给出任意深度 y 处的速率

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}, \quad ds = \sqrt{1 + y'^2} dx, \quad y' \equiv \frac{dy}{dx} \quad (1)$$

即: 速率只与当前深度有关, 与走的路径无关——这正是后续一切“曲线形态不影响速率、只影响时间”的关键。于是运动时间是路径形状 $y(x)$ ($y \in C^2$, $y(0) = 0$, $y(x_B) = y_B$) 的泛函:

$$T[y] = \int_0^{x_B} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_B} F(y, y') dx, \quad F(y, y') = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}} \quad (2)$$

问题归结为求 $T[y]$ 的极小值曲线: 变分问题 $\delta T = 0$ 。

2 变分法求解

2.1 欧拉-拉格朗日方程

泛函 (2) 极值的必要条件为欧拉-拉格朗日 (Euler-Lagrange) 方程

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad (3)$$

2.2 首次积分：F 不显含 x

由于 F 不含自变量 x (约束定常), 有恒等式 $\frac{d}{dx} \left(F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = -\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, 故得首次积分:

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}, \quad F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = C \quad (4)$$

把积分常数记为 $C = \frac{1}{\sqrt{2a}}$ ($a > 0$, 后文可见它恰为滚动圆半径), 得到

$$\boxed{y(1+y'^2) = 2a} \quad (5)$$

2.3 参数化解：摆线

由 (5) 得 $y' = \sqrt{\frac{2a-y}{y}}$ (最速路径 y 单调增加), 即

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{y}{2a-y}} \quad (6)$$

作参数化 $y = a(1-\cos\theta)$ (θ 从 0 开始), 则 $\frac{y}{2a-y} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = \tan^2 \frac{\theta}{2}$, 且 $dy = a \sin\theta d\theta$, 于是

$$dx = a \tan \frac{\theta}{2} \cdot \sin\theta d\theta = a(1-\cos\theta) d\theta \implies x = a(\theta - \sin\theta) + \text{const} \quad (7)$$

由 $A = (0, 0)$ 对应 $\theta = 0$ 、常数取零, 得摆线:

$$\boxed{x = a(\theta - \sin\theta), \quad y = a(1 - \cos\theta)} \quad (8)$$

几何意义: 半径 a 的圆沿 x 轴无滑动滚动, 其轮缘上一点的轨迹即 (8)。有两点值得强调的几何特征:

- **起点为尖点 (cusp):** $\theta \rightarrow 0$ 时 $y \sim x^{2/3}$, 切向为竖直方向 $y' \rightarrow \infty$ ——最速路径在起点“垂直坠落”以最快获得速率, 这正是引言里说的与“圆弧直觉”相反之处;
- **最深点恰在 $\theta = \pi$:** 此时 $y = 2a$, $x = \pi a$, 切线水平。

2.4 端点匹配与最短时间

要求曲线过 $B = (x_B, y_B)$, 记端点对应参数为 θ_B ($0 < \theta_B < 2\pi$):

$$\frac{x_B}{y_B} = \frac{\theta_B - \sin \theta_B}{1 - \cos \theta_B}, \quad a = \frac{y_B}{1 - \cos \theta_B} \quad (9)$$

比值 $r(\theta) = \frac{\theta - \sin \theta}{1 - \cos \theta}$ 在 $(0, 2\pi)$ 上严格单调 ($r \rightarrow 0$ 当 $\theta \rightarrow 0$, $r \rightarrow \infty$ 当 $\theta \rightarrow 2\pi$), 故对任意 B ($x_B, y_B > 0$) 方程 (9) 的解唯一, 可数值求得。

最短时间: 把 (8) 代入 T , 利用 $ds = a\sqrt{2(1 - \cos \theta)} d\theta$ 与 $v = \sqrt{2ga(1 - \cos \theta)}$, 得

$$T^* = \theta_B \sqrt{\frac{a}{g}} \quad (10)$$

这是全文中最重要的公式: 给定端点 B 后, 先由 (9) 解出 θ_B 与 a , 最小时间 (10) 随之确定。

2.5 光学类比: 伯努利的原始解法

约翰·伯努利本人的解法没有用变分法 (当时尚未成熟), 用的却是 **费马原理**: 光在折射率 $n \propto 1/v$ 的分层介质中走的时间 $\int n ds$ 取极小。把”速率随深度变化”的力学系统对应成”介质折射率随深度变化”的光学系统, 最速路径即光路:

$$\frac{\sin \gamma}{v} = \text{const} \quad (11)$$

其中 γ 为路径切线与竖直方向夹角。对本问题可直接验证: 切向矢量 $\propto (1 - \cos \theta, \sin \theta)$, 于是 $\cos \gamma = \sin \theta / \sqrt{(1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta} = \cos(\theta/2)$, $\gamma = \theta/2$; 又 $v = 2\sqrt{ag} \sin(\theta/2)$, 故

$$\frac{\sin \gamma}{v} = \frac{1}{2\sqrt{ag}} = \text{const} \quad (12)$$

与 (11) 一致——这正是 (5) 在朗格朗日表述下的同一条规律, 两条路线互为印证。此外, $v(y)$ 与 $\gamma(y)$ 的关系 ($\sin^2 \gamma = y/(2a)$) 也给出几何解释: 越深的地方路径越陡 (几乎水平), 越浅的地方近乎竖直——”先陡后缓”轮廓的来源。

2.6 注记: 摆线的等时性

同一个几何对象还有第二个身份: 惠更斯 (Huygens, 1659) 发现 **等时曲线 (tautochrone)**——翻转摆线形轨道上, 无论质点从哪个高度静止开始滑落, 到达最低点所用的时间都相同。这一性质是惠更斯摆钟 (cycloidal pendulum) 设计的原理: 周期与振幅无关, 计时精准。最速落径与等时线共享同一条摆线, 是经典力学里”一条曲线、两重身份”的典型例子——两者的差别仅在于后者要求起点任意静止释放 (速度公式换成 $v = \sqrt{2g(y - y_0)}$), 而最短时间原理不变。

3 数值独立验证：直接离散化优化

3.1 离散化与解析梯度

不假设曲线形状，把轨道离散为 N 段折线： x 等间隔取 $N + 1$ 个点，端点 y 固定，中间 $N - 1$ 个 y_i 为自由度。每段上 $y(x)$ 线性变化，线段时间可精确积出（不是近似）：

$$T_{\text{seg}} = \int \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \frac{2ds}{\sqrt{2g}(\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2})} \quad (13)$$

总时间 $T = \sum_i T_{\text{seg}}^{(i)}$ 是各 y_i 的（在该问题中近似凸的）光滑函数，用带边界的 L-BFGS-B 求解；为使大 N 收敛，提供解析梯度（每段局部贡献）：

$$\frac{\partial T_{\text{seg}}}{\partial y_1} = \frac{2}{D} \frac{\partial ds}{\partial y_1} - \frac{2ds}{D^2} \frac{\partial D}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial ds}{\partial y_1} = -\frac{\Delta y}{ds}, \quad \frac{\partial D}{\partial y_1} = \frac{\sqrt{2g}}{2\sqrt{y_1}}, \quad D = \sqrt{2g}(\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2}) \quad (14)$$

3.2 结果对照（ $B = (1, 1)$, $N = 40$ ）

表 1: 各候选路径用时（ $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ）。 T^* 为变分解（摆线）， T_L 为直线用时， T_{arc} 为圆弧用时。

路径	时间 T / s	相对最优	备注
摆线（变分解）	0.583193	0 %	T^* ，即 (10)
数值离散解（ $N = 40$ ）	0.584057	+0.148 %	直接离散优化
圆弧（ A 处切向水平）	0.592262	+1.555 %	伽利略的猜测
直线（ $A \rightarrow B$ ）	0.638877	+9.548 %	直觉路径

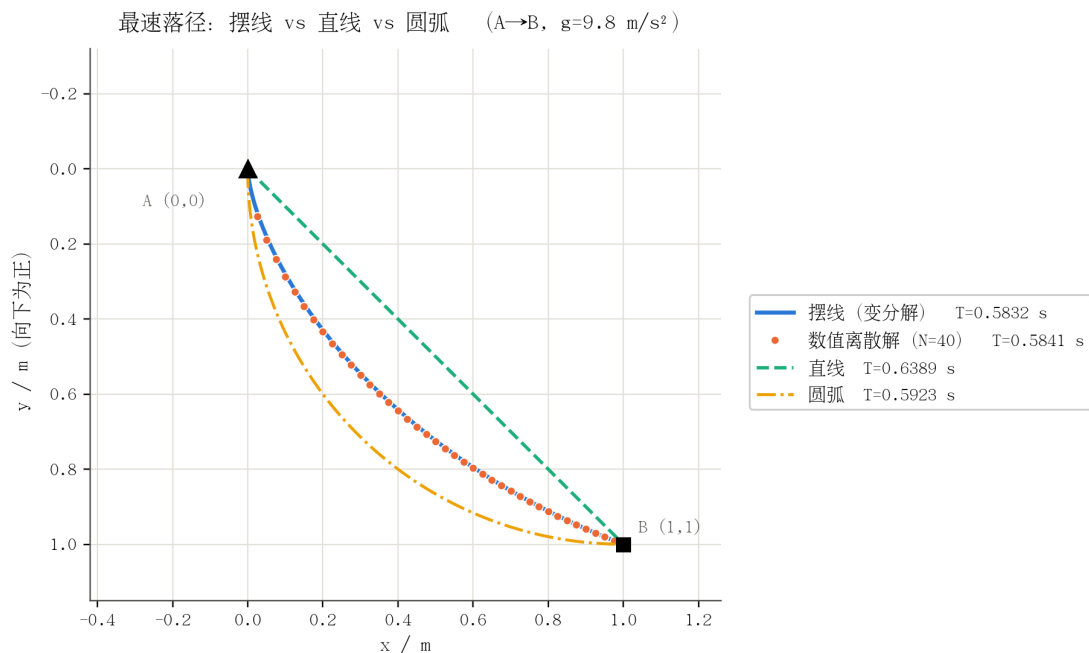


图 1: 各候选路径。蓝色为变分解（摆线），橙色圆点为数值离散优化解——两者完全重合，说明数值方法在不预设曲线形状的前提下独立找到了摆线；直线与圆弧都明显更慢。

值得说明：数值最优值略高于解析值（+0.15% 量级）不是误差的方向混淆——离散折线构成的函数族只是全体 C^2 曲线的子集，最优值只能被逼近而不能被超过，因此 $T_{\text{num}} \geq T^*$ 是必然的。

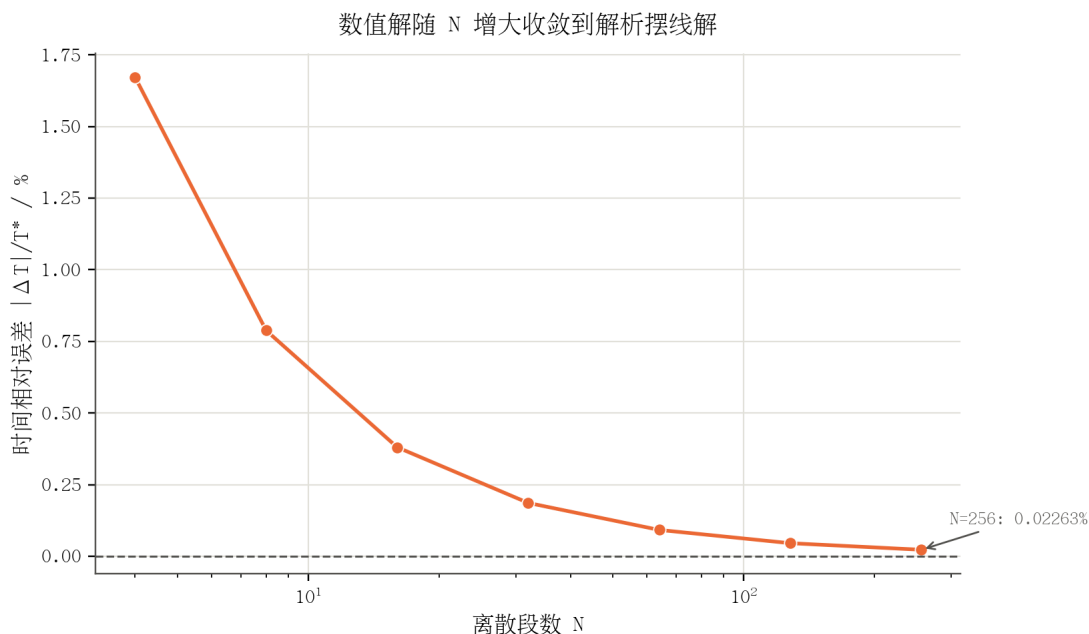


图 2: 数值解相对误差随 N 的对数收敛图。 N 每翻倍误差近似减半，一阶收敛——分段线性离散的固有误差率（路径形状误差 $\sim 1/N$ ）。

3.3 收敛性与误差来源

表 2: 数值解收敛到 $T^* = 0.583193$ s

N	$T_{\text{num}} / \text{s}$	相对误差
4	0.592944	+1.672 %
8	0.587789	+0.788 %
16	0.585411	+0.380 %
32	0.584278	+0.186 %
64	0.583728	+0.092 %
128	0.583458	+0.046 %
256	0.583325	+0.023 %

误差随 N 的收敛呈严格一阶（减半）特征，来源有二：

1. **曲率大的区域被网格“抹平”**：起点 A 是尖点， $y \sim x^{2/3}$ ，曲率发散，线性段在该区域的逼近耗时占主导；
2. **泛函本身对路径形状不敏感**：由于速率只依赖深度，一阶（路径）误差转化为时间误差时还要再打折，故可观测的相对误差量级恰为 $O(1/N)$ 。

4 分情况讨论：不同落点 B 处的曲线形态与用时

最速落径的形状只依赖比值 $r \equiv x_B/y_B$ （整体缩放 A, B 时曲线形状不变，只有 a 变）。摆线在 $\theta = \pi$ 处达到全曲线的**最深点**（深度 $2a$ ，切线水平），而由 (9) 恰有

$$\theta_B = \pi \iff r = r(\pi) = \frac{\pi}{2} \approx 1.5708 \tag{15}$$

于是按 r 与 $\pi/2$ 的关系，问题出现三种典型形态，这是本报告的核心讨论。

4.1 三种形状区间

表 3: 三种形态（ y 向下为正；”最深点”指曲线上深度最大的点）

区间	形态	特征
$r < \frac{\pi}{2}$ ($x_B < 1.571 y_B$, B 偏陡)	单调下落	B 即整个曲线最深点；曲线由竖直渐转平缓，终点处最陡
$r = \frac{\pi}{2}$	临界	B 恰为最深点，终点处切线水平
$r > \frac{\pi}{2}$ ($x_B > 1.571 y_B$, B 偏平缓)	下潜过 B 再回升	曲线先下潜至 $\theta = \pi$ （深度 $2a > y_B$ ，途中低于 B ），再上升回到 B ； B 越平缓，下潜越深

$r > \pi/2$ 情形的物理图景是以深换速：先极速下潜，在深度 $2a$ 处速率达到 $v_{\max} = \sqrt{4ga}$ （该处路径水平，全部重力势能转化为动能），随后爬升送还一部分动能，但整体换来更短的路程时间。深潜幅度 $2a = 2y_B/(1 - \cos \theta_B)$ ；当 $\theta_B \rightarrow 2\pi$ （ B 又远又平）时 $1 - \cos \theta_B \rightarrow 0$ ， $2a$ 趋于无穷——大胆的”预支”。

4.2 四个落点对照

取目落点由”陡”至”平”的 B_1 – B_4 计算如下（ $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ）：

表 4: 四个落点的极速路径参数与用时。 T^* 为摆线最小时间, T_L 为 A-B 直线用时, $R = T^*/T_L$ 。最深点低于 y_B 即”下潜过 B”。

落点	$r = x_B/y_B$	θ_B (rad)	形态	曲线最深点 (m)	T^*/s (摆线)	$R = T^*/T_L$
B_1 (0.5, 1.0)	0.500	1.401	单调, B_1 即最深	1.000	0.4910	0.9720
B_2 (1.0, 1.0)	1.000	2.412	单调, B_2 即最深	1.000	0.5832	0.9128
B_3 (2.0, 1.0)	2.000	3.508	下潜过 B_3	1.034	0.8060	0.7979
B_4 (3.0, 0.5)	6.000	4.754	下潜过 B_4	1.043	1.0966	0.5643

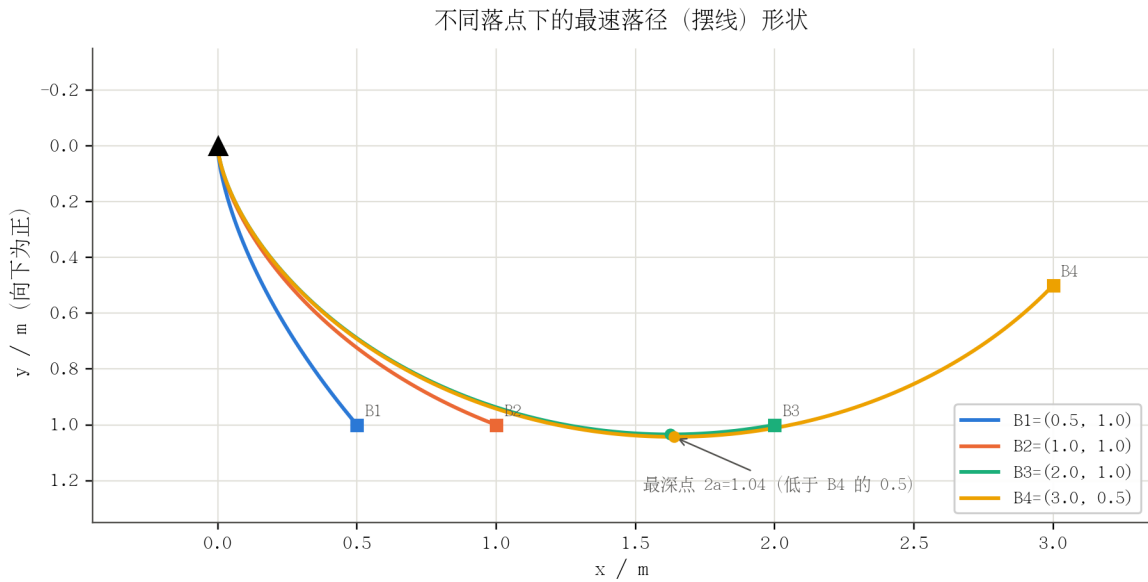


图 3: 四个落点对应的最速落径。 B_1 、 B_2 在临界线以内 ($r < \pi/2$), 曲线单调下落、 B 即最深点; B_3 ($r = 2$) 刚刚越过 $\pi/2$, 曲线下潜至 $2a = 1.034$ 再回升到 B_3 ; B_4 ($r = 6$) 下潜最深点 $2a = 1.043$, 约为终点深度 (0.5) 的两倍。

B_4 可以定量说明”以深换速”: 终点深度仅 0.5 m, 直线终点速率只有 $v = \sqrt{2gy_B} = 3.13$ m/s; 最速曲线下潜到 1.043 m, 速率可达 $v_{\max} = \sqrt{4ga} = 4.52$ m/s (+44%)。这笔”预支的速度”在爬升段只被部分清偿, 净收益由 $R = 0.5643$ (快 43.6%) 直观呈现。

4.3 与直线用时之比

直线（匀速公式: y 线性地从 0 升至 y_B ）的用时为 $T_L = \sqrt{\frac{2y_B(1+r^2)}{g}}$, 与最优时间的比值:

$$R(r) \equiv \frac{T^*}{T_L} = \frac{\theta_B}{\sqrt{2(1 - \cos \theta_B)(1 + r^2)}}, \quad T_L = \sqrt{\frac{2y_B(1 + r^2)}{g}} \quad (16)$$

$R(r)$ 只依赖 r , 随 r 单调减小 (见图 4), 极限行为:

- $r \rightarrow 0$ (近垂直下落): $R \rightarrow 1$ ——此时 B 几乎在 A 正下方, 直线就是竖直落线, 与摆线几乎重合;
- $r = 1$ (45° 对角): $R = 0.9128$ ——摆线快 9.5 %;
- $r \rightarrow \infty$ (B 又远又平): $R \rightarrow 0$ ——直线近乎水平、速率几乎不增长, 用时趋于无穷; 而摆线退化为完整拱 ($a = x_B/2\pi$, 深度足够), $T^* = 2\pi\sqrt{a/g}$ 仍为有限值。 $R \rightarrow 0$ 是对“最速落径”深度换速度、速度换时间”的极致宣告。

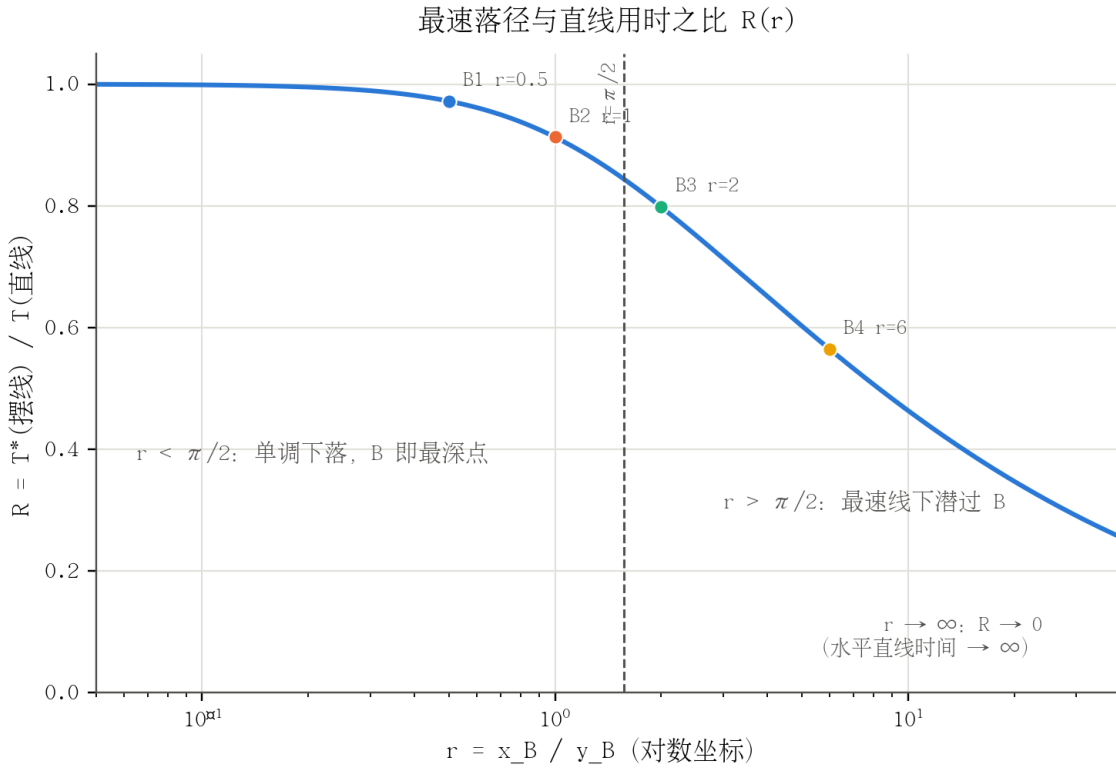


图 4: 比值 $R(r)$ 随 r 的变化 (对数坐标)。虚线为临界值 $r = \pi/2$; 四个圆点对应表 4 中的落点。左侧单调区 R 接近 1 (两线几乎同为最优), 越过 $\pi/2$ 后 R 加速下降。

5 结论

1. **最速落径是摆线。**以变分法(欧拉-拉格朗日方程 + 不含 x 的首次积分)得 $y(1+y'^2) = 2a$, 参数解 $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$ 恰为滚动圆轮缘点轨迹;最短时间 $T^* = \theta_B \sqrt{a/g}$ 。

2. **数值方法独立复现。**直接离散化时间泛函并用 L-BFGS-B 优化（解析梯度），所得曲线与解析解完全重合；对 $B = (1, 1)$ ，直线慢 9.5 %、圆弧慢 1.6 %——“两点间直线距离最短”不等于“时间最短”。
3. **形状依 $r = x_B/y_B$ 分三区。** $r < \pi/2$ ：单调下落，B 即最深点； $r > \pi/2$ ：曲线先下潜到 $2a > y_B$ （低于终点）再爬升回 B——下潜换来提速，B 越平缓下潜越深，极端 $y_B \rightarrow 0$ 时退化完整摆线拱。
4. **比值 $R(r) = T^*/T_L$ 随 r 单调下降：**近垂直下落 $R \rightarrow 1$ （两线合一），远平的目标 $R \rightarrow 0$ （直线时间趋于无穷）。
5. **与方法论总结：**变分法给出闭式解和任意端点的一般理论；数值法可处理解析不可积的推广（摩擦、变化重力场等），两者互补。

参考资料

1. 约翰·伯努利（1696）提出最速落径问题；牛顿、莱布尼茨、洛必达、雅可比·伯努利等先后解答——变分法由此诞生。
2. 周衍柏，《理论力学教程》（物理专业经典教材，变分原理与拉格朗日力学部分）。
3. H. Goldstein, *Classical Mechanics*, 3rd ed., Chapter 2, “The Variational Principle”.
4. 惠更斯（1659）摆在摆线形双轨上的悬点摆（cycloidal pendulum）——等时曲线（tautochrone）的物理实现。