

量子光学

第四章 光场与原子相互作用

黄月新

大湾区大学

2026 年 4 月 30 日

课程大纲

量子光学是研究光场的量子性质，及其与原子、分子等物质相互作用的物理学分支，核心内容包括光子的产生、操控与探测以及光-物质的量子相干与纠缠现象。

第一章 辐射场及其量子化 (2 次课)

第二章 量子相干态 (3 次课)

第三章 光场相干性及其干涉 (3 次课)

第四章 光场与原子相互作用 (4 次课)

第五章 热库系统与主方程 (2 次课)

第六章 激光冷却技术 (2 次课)

第七章 光学腔和光力耦合系统 (2 次课)

参考资料

- 《量子光学》，郭光灿，周祥发，科学出版社
- Quantum Optics, Marlan O. Scully, M. Suhail Zubairy, Cambridge University Press
- Lecture of Professor Farhan Rana
- 维基百科 (wikipedia.org)

第四章

原子光场耦合及电偶极近似

经典光场与原子的相互作用

量子光场与原子的相互作用

Jaynes-Cummings 模型

Rabi 模型

Dicke 模型和超辐射

总结

第四章

原子光场耦合及电偶极近似

经典光场与原子的相互作用

量子光场与原子的相互作用

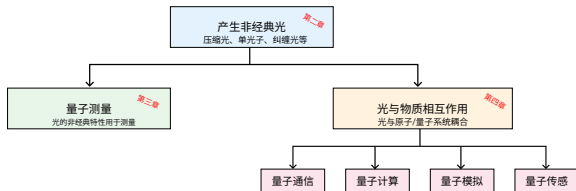
Jaynes-Cummings 模型

Rabi 模型

Dicke 模型和超辐射

总结

光场和原子耦合



光场-原子相互作用把光（信息载体）和物质（可存储可操控的系统）耦合起来，
是量子光学和量子信息的核心

- 原子：存储信息，量子比特，稳定
- 光子：操控性强，传输信息，传播快，损耗小

→ 把信息在两者之间转换

原子光场耦合及电偶极近似

原子与光场的作用主要是通过原子外层电子对电磁场的吸收和辐射来体现

- 全经典理论

光场由麦克斯韦方程描述，物质遵循牛顿方程

- 半经典或半量子方法

光场还是采用经典麦克斯韦方程处理，原子遵循薛定谔方程

- 全量子理论

光场和原子都进行量子化处理

原子光场耦合及电偶极近似

带电粒子与电磁场的耦合

$$H = \frac{[\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)]^2}{2m} + q\Phi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r})$$

满足薛定谔方程

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = H\psi(\mathbf{r}, t)$$

- 电子带电: $q = -e < 0$
- 概率 $P(\mathbf{r}, t) = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2$

$$\psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \psi(\mathbf{r}, t)e^{i\chi_0}$$

χ_0 是一个常数相位, 它不影响概率分布, 也不影响动力学演化

原子光场耦合及电偶极近似

如果相位是局域变化的

$$\psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \psi(\mathbf{r}, t)e^{i\chi(\mathbf{r}, t)}$$

- 概率分布还是不变
- 薛定谔方程不再满足
- 要满足局域规范不变，薛定谔方程的场就要适当改变

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\nabla - i\frac{e}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right] + e\Phi(\mathbf{r}, t) \right\} \psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

规范场变换

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{\hbar}{e} \nabla \chi(\mathbf{r}, t)$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\hbar}{e} \frac{\partial \chi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

规范不变场

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

原子光场耦合及电偶极近似

- 原子尺寸 $\sim 0.1 \text{ nm} \sim \text{angstrom}$
- 光场波长 $\sim 400 - 700 \text{ nm}$
- 一般情况满足 $k \cdot r \ll 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}, t) &= \mathbf{A}(t)e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_0 + \mathbf{r})} \\ &= \mathbf{A}(t)e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0} (1 + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \dots) \\ &\approx \mathbf{A}(t)e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0} \end{aligned}$$

电偶极近似

原子光场耦合及电偶极近似

对波函数做变换

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \exp\left[i\frac{e}{\hbar}\mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t) \cdot \mathbf{r}\right] \phi(\mathbf{r}, t)$$

代入薛定谔方程，得到

$$i\hbar \left[i\frac{e}{\hbar} \dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{r} \phi(\mathbf{r}, t) + \dot{\phi}(\mathbf{r}, t) \right] \exp\left(i\frac{e}{\hbar} \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}\right) = \exp\left(i\frac{e}{\hbar} \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}\right) \left[\frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \right] \phi(\mathbf{r}, t)$$

整理，得到

$$i\hbar \dot{\phi}(\mathbf{r}, t) = [H_0 - e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t)] \phi(\mathbf{r}, t)$$

其中 $\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}}$

$$H_1 = -e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t)$$

原子光场耦合及电偶极近似

考虑规范

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

总哈密顿量

$$H = H_0 + H_2$$

电偶极近似给出

$$H_2 = -\frac{e}{m} \mathbf{p} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t) + \frac{e^2}{2m} A^2(\mathbf{r}_0, t)$$

原子光场耦合及电偶极近似

两项对比

$$H_1 = -e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t) = e\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{A}}, \quad H_2 = -\frac{e}{m}\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t)$$

- 经典力学角度，拉格朗日量只差一个全微分
- 设 $E(0, t) = \mathcal{E} \cos(\nu t)$ ，则矢量场 $A(0, t) = -\frac{1}{\nu}\mathcal{E} \sin(\nu t)$

$$W_1 = -e\mathbf{r} \cdot \mathcal{E}, \quad W_2 = \frac{e}{m\nu}\mathbf{p} \cdot \mathcal{E}$$

原子光场耦合及电偶极近似

矩阵元

$$\begin{aligned}\langle f|W_2|i\rangle &= \frac{e}{m\nu} \langle f|\mathbf{p}|i\rangle \cdot \mathcal{E} \\ &= \frac{e}{m\nu} m \frac{-i}{\hbar} \langle f|[\mathbf{r}, H_0]|i\rangle \cdot \mathcal{E} \\ &= -\frac{ie}{\nu} (\omega_f - \omega_i) \langle f|\mathbf{r}|i\rangle \cdot \mathcal{E}\end{aligned}$$

得到

$$\left| \frac{\langle f|W_2|i\rangle}{\langle f|W_1|i\rangle} \right| = \frac{\omega_f - \omega_i}{\nu}$$

- 两种不同的耦合给出的跃迁矩阵元相差一个比例因子 $\frac{\omega_f - \omega_i}{\nu}$ ，从而对演化结果给出不同的理论预言

第四章

原子光场耦合及电偶极近似

经典光场与原子的相互作用

量子光场与原子的相互作用

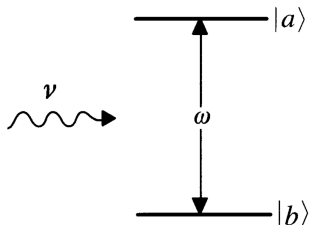
Jaynes-Cummings 模型

Rabi 模型

Dicke 模型和超辐射

总结

经典光场与原子相互作用



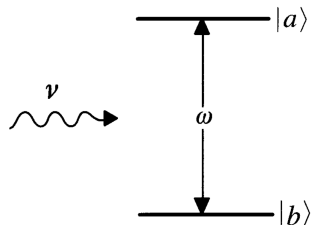
考虑一个二能级系统

$$|\psi(t)\rangle = c_a(t) |a\rangle + c_b(t) |b\rangle$$

薛定谔方程

$$i\hbar \dot{|\psi(t)\rangle} = (H_0 + H_1) |\psi(t)\rangle$$

经典光场与原子相互作用



由 $H_0 |a\rangle = \hbar\omega_a |a\rangle$ 和 $H_0 |b\rangle = \hbar\omega_b |b\rangle$

$$H_0 = (|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|)H_0(|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|) = \hbar\omega_a |a\rangle\langle a| + \hbar\omega_b |b\rangle\langle b|$$

原子和辐射场的相互作用

$$\begin{aligned} H_1 &= -exE(t) \\ &= -e(|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|)x(|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|)E(t) \\ &= -(\wp_{ab} |a\rangle\langle b| + \wp_{ba} |b\rangle\langle a|)E(t) \end{aligned}$$

其中 $\wp_{ab} = \wp_{ba}^* = e \langle a|x|b\rangle$ 是偶极矩的矩阵元

偶极近似下，电场

$$E(t) = \mathcal{E} \cos(\nu t)$$

薛定谔方程

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} c_a \\ c_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hbar\omega_a & -\wp_{ab}\mathcal{E} \cos(\nu t) \\ -\wp_{ba}\mathcal{E} \cos(\nu t) & \hbar\omega_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_a \\ c_b \end{pmatrix}$$

Rabi 频率 $\Omega_R = \frac{|\wp_{ba}|\mathcal{E}}{\hbar}$

偶极近似下，电场

$$E(t) = \mathcal{E} \cos(\nu t)$$

薛定谔方程

$$\dot{c}_a = -i\omega_a c_a + i\Omega_R e^{-i\phi} \cos(\nu t) c_b$$

$$\dot{c}_b = -i\omega_b c_b + i\Omega_R e^{i\phi} \cos(\nu t) c_a$$

Rabi 频率 $\Omega_R = \frac{|d_{ba}| \mathcal{E}}{\hbar}$

经典光场与原子相互作用

设 $C_a = c_a e^{i\omega_a t}$, $C_b = c_b e^{i\omega_b t}$

$$\dot{C}_a = i\Omega_R e^{-i\phi} \cos(\nu t) C_b e^{i(\omega_a - \omega_b)t}$$

$$\dot{C}_b = i\Omega_R e^{i\phi} \cos(\nu t) C_a e^{-i(\omega_a - \omega_b)t}$$

写成指数形式，得到

$$\dot{C}_a = i\frac{\Omega_R}{2} e^{-i\phi} C_b e^{i(\omega - \nu)t} + i\frac{\Omega_R}{2} e^{-i\phi} C_b e^{i(\omega + \nu)t}$$

$$\dot{C}_b = i\frac{\Omega_R}{2} e^{i\phi} C_a e^{-i(\omega - \nu)t} + i\frac{\Omega_R}{2} e^{i\phi} C_a e^{-i(\omega + \nu)t}$$

- 旋波近似 (Rotating wave approximation, RWA)

高频振荡项，在考虑的时间尺度上平均为 0

- 吸收光子，原子从基态跃迁到激发态 ✓
- 吸收光子，原子从激发态跃迁到基态 ✗

经典光场与原子相互作用

设 $C_a = c_a e^{i\omega_a t}$, $C_b = c_b e^{i\omega_b t}$

$$\dot{C}_a = i\Omega_R e^{-i\phi} \cos(\nu t) C_b e^{i(\omega_a - \omega_b)t}$$

$$\dot{C}_b = i\Omega_R e^{i\phi} \cos(\nu t) C_a e^{-i(\omega_a - \omega_b)t}$$

写成指数形式，得到

$$\dot{C}_a = i\frac{\Omega_R}{2} e^{-i\phi} C_b e^{i(\omega - \nu)t}$$

$$\dot{C}_b = i\frac{\Omega_R}{2} e^{i\phi} C_a e^{-i(\omega - \nu)t}$$

- 旋波近似 (Rotating wave approximation, RWA)

高频振荡项，在考虑的时间尺度上平均为 0

- 吸收光子，原子从基态跃迁到激发态 ✓
- 吸收光子，原子从激发态跃迁到基态 ✗

对第一个方程再微分一次，得到

$$\begin{aligned}\ddot{C}_a &= i\frac{\Omega_R}{2}e^{-i\phi} \left(\dot{C}_b e^{i\Delta t} + i\Delta C_b e^{i\Delta t} \right) \\ &\rightarrow \ddot{C}_a - i\Delta\dot{C}_a + \frac{\Omega_R^2}{4}C_a = 0\end{aligned}$$

通解

$$\begin{aligned}C_a(t) &= \left(a_1 e^{i\Omega t/2} + a_2 e^{-i\Omega t/2} \right) e^{i\Delta t/2} \\ C_b(t) &= \frac{2\dot{C}_a}{i\Omega_R} e^{i\phi - i\Delta t} = \frac{2a_1(\Delta + \Omega)e^{i\Omega t/2} + a_2(\Delta - \Omega)e^{-i\Omega t/2}}{i\Omega_R} e^{i\phi - i\Delta t/2}\end{aligned}$$

- $\Delta = \omega - \nu$ 为失谐量
- $\Omega = \sqrt{\Delta^2 + \Omega_R^2}$ 为有效拉比频率

代入初始条件

$$C_a(t) = C_a(0) \left(\cos \frac{\Omega t}{2} - \frac{i\Delta}{\Omega} \sin \frac{\Omega t}{2} \right) e^{i\Delta t/2} + i \frac{\Omega_R}{\Omega} e^{-i\phi} C_b(0) \sin \frac{\Omega t}{2} e^{i\Delta t/2}$$

$$C_b(t) = C_b(0) \left(\cos \frac{\Omega t}{2} + \frac{i\Delta}{\Omega} \sin \frac{\Omega t}{2} \right) e^{-i\Delta t/2} + i \frac{\Omega_R}{\Omega} e^{i\phi} C_a(0) \sin \frac{\Omega t}{2} e^{-i\Delta t/2}$$

- 可以验证 $|C_a(t)|^2 + |C_b(t)|^2 = 1$
- 粒子数在 $|a\rangle$ 和 $|b\rangle$ 之间形成振荡，振荡频率 Ω

如果初态制备在激发态 $|a\rangle$, 即 $C_a(0) = 1, C_b(0) = 0$, 则粒子数反转

$$W(t) = |C_a(t)|^2 - |C_b(t)|^2 = \left(\frac{\Delta^2 - \Omega_R^2}{\Omega^2} \right) \sin^2 \frac{\Omega t}{2} + \cos^2 \frac{\Omega t}{2}$$

- 如果失谐量为零 $\Delta = 0$, 有 $\Omega = \Omega_R$, 则

$$W(t) = \cos(\Omega_R t)$$

→ 原子在基态和激发态之间周期振荡

能级之间形成偶极子

$$P(t) = e \langle \psi(t) | \mathbf{r} | \psi(t) \rangle = c_a^* c_b \wp_{ab} + c.c. = C_a^* C_b \wp_{ab} e^{i\omega t} + c.c.$$

同样假定初态 $|a\rangle$, 则

$$P(t) = 2 \operatorname{Re} \left[i \frac{\Omega_R}{\Omega} \wp_{ab} \left(\cos \frac{\Omega t}{2} + \frac{i\Delta}{\Omega} \sin \frac{\Omega t}{2} \right) \sin \frac{\Omega t}{2} e^{i\phi} e^{i\nu t} \right]$$

- 偶极矩振荡频率与入射场频率相同
- 1937, Rabi 考虑自旋 1/2 的磁偶极子在磁场中的近动

经典光场与原子相互作用

密度矩阵

$$\rho = \sum_i P_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$$

运动方程

- 对时间微分

$$\dot{\rho} = \sum_i P_i \left(|\dot{\psi}_i\rangle\langle\psi_i| + |\psi_i\rangle\langle\dot{\psi}_i| \right)$$

- 代入薛定谔方程，得到

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho]$$

Liouville or Von Neumann equation of motion for density matrix

- 注意与海森堡方程对比

$$\frac{d}{dt} \hat{A}_H(t) = \frac{i}{\hbar} [H_H(t), \hat{A}_H] + \left(\frac{\partial \hat{A}_S}{\partial t} \right)$$

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho]$$

- 原子态由于自发辐射等会发生耗散
- 耗散率可以用一个矩阵定义

$$\langle n|\Gamma|m\rangle = \gamma_n \delta_{nm}$$

- 耗散的形式非常复杂，但是可以用以下方程表示

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] - \frac{1}{2}\{\Gamma, \rho\}$$

二能级系统

- ρ_{aa} 和 ρ_{bb} 对角元表示两个态的占据概率
- 非对角元表示元子的极化

$$P(z, t) = C_a C_b \rho_{ba} + c.c. = \rho_{ab}(z, t) \rho_{ba} + c.c.$$

- 激发态 $|a\rangle$ 由于环境的影响产生退相干，用 γ 表示耗散
- ρ_{aa} 的耗散会导致 ρ_{ab} 的退相干，速率为 $\gamma/2$
- 原子之间的碰撞可能让系统相位发生混乱，也会导致退相干，速率为 γ_c
- 非对角元相位退相干速度 $\gamma_{\perp} = \gamma/2 + \gamma_c$

$$\frac{d}{dt} \rho_{aa} = -\gamma \rho_{aa} + \frac{i}{2} \left(\Omega_R e^{i\phi} \rho_{ba} - \Omega_R e^{-i\phi} \rho_{ab} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \rho_{bb} = \gamma \rho_{bb} - \frac{i}{2} \left(\Omega_R e^{i\phi} \rho_{ba} - \Omega_R e^{-i\phi} \rho_{ab} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \rho_{ab} = -(\gamma_{\perp} + i\Delta) \rho_{ab} - i \frac{\Omega_R}{2} e^{i\phi} (\rho_{aa} - \rho_{bb})$$

令方程左边为零，得到稳态解

$$\rho_{aa} = \frac{\gamma_{\perp} |\Omega_R|^2}{2[\gamma(\gamma_{\perp}^2 + \Delta^2) + \gamma_{\perp} |\Omega_R|^2]} = \frac{1}{2} \frac{S}{1+S}$$
$$\rho_{ab} = \frac{-i\Omega_R e^{i\phi} (\gamma_{\perp} - i\Delta)}{2[\gamma(\gamma_{\perp}^2 + \Delta^2) + \gamma_{\perp} |\Omega_R|^2]}$$

- 其中 S 称为饱和参数

$$S = \frac{\gamma_{\perp} |\Omega_R|^2}{\gamma(\gamma_{\perp}^2 + \Delta^2)}$$

- 失谐量 Δ 的洛伦兹函数
- $\rho_{ee} \leq 1/2$
- $|\rho_{ab}| = \frac{\gamma}{4\gamma_{\perp}} \frac{S}{(1+S)^2}$

第四章

原子光场耦合及电偶极近似

经典光场与原子的相互作用

量子光场与原子的相互作用

Jaynes-Cummings 模型

Rabi 模型

Dicke 模型和超辐射

总结

量子光场与原子的相互作用

光场的电场形式为

$$\hat{E}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \hat{e}_{\sigma} \sqrt{\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{2 \epsilon_0 V}} (\hat{a}_{\mathbf{k}, \sigma} e^{-i \omega_{\mathbf{k}} t} - \hat{a}_{\mathbf{k}, \sigma}^{\dagger} e^{i \omega_{\mathbf{k}} t})$$

- 为方便，上式转换到薛定谔表象，因此可以去掉含时项
- 与经典场不同，需要考虑电磁场的量子化

$$H_0 = \sum_i \epsilon_i |i\rangle\langle i| + \hbar \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \omega_{\mathbf{k}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}, \sigma}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}, \sigma} + \frac{1}{2} \right)$$

量子光场与原子的相互作用

光场的电场形式为

$$\hat{E}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{k, \sigma} \hat{e}_\sigma \sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{2\epsilon_0 V}} (\hat{a}_{k, \sigma} e^{-i\omega_k t} - \hat{a}_{k, \sigma}^\dagger e^{i\omega_k t})$$

- 为方便，上式转换到薛定谔表象，因此可以去掉含时项
- 与经典场不同，需要考虑电磁场的量子化

$$H_0 = \sum_i \varepsilon_i |i\rangle\langle i| + \hbar \sum_{k, \sigma} \omega_k \left(\hat{a}_{k, \sigma}^\dagger \hat{a}_{k, \sigma} + \frac{1}{2} \right)$$

耦合部分

$$H_1 = i\hbar \sum_{k, \sigma} \sum_{i, j} g_{k, i, j} |i\rangle\langle j| \left(\hat{a}_{k, \sigma} - \hat{a}_{k, \sigma}^\dagger \right)$$

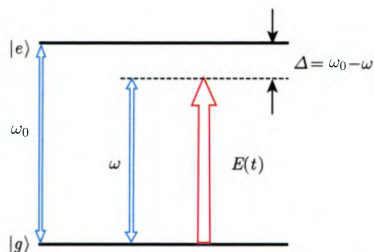
其中耦合系数

$$g_{k, i, j} = -\sqrt{\frac{\omega_k}{2\epsilon_0 \hbar V}} \mathbf{d}_{ij} \cdot \mathbf{e}_\sigma$$

$\mathbf{d}_{ij} = \langle i | \mathbf{d} | j \rangle$ 为偶极矩矩阵元

量子光场与原子的相互作用

例子: 二能级系统



$$H = \frac{1}{2}\hbar\omega_0 (|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|) + \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) + \hbar \left[\lambda |e\rangle\langle g| (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) + \lambda^* |g\rangle\langle e| (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \right]$$

- $\Delta < 0$: 红失谐
- $\Delta > 0$: 蓝失谐

量子光场与原子的相互作用

例子: 二能级系统

$$H = \frac{1}{2}\hbar\omega_0 (|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|) + \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \\ + \hbar \left[\lambda |e\rangle\langle g| (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) + \lambda^* |g\rangle\langle e| (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \right]$$

- 一般系统, $\lambda < \omega_0$

光腔中的里德堡原子: $\lambda/\omega_0 \sim 10^{-6}$

- $\lambda = 0$, 演化可以写为

$$\hat{a}(t) = \hat{a}(0)e^{-i\omega t}, \quad |g\rangle\langle e|_t = |g\rangle\langle e|_0 e^{-i\omega_0 t}, \quad |e\rangle\langle g|_t = |e\rangle\langle g|_0 e^{i\omega_0 t}$$

量子光场与原子的相互作用

例子: 二能级系统

$$H = \frac{1}{2}\hbar\omega_0 (|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|) + \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \\ + \hbar \left[\lambda |e\rangle\langle g| (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) + \lambda^* |g\rangle\langle e| (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \right]$$

- 一般系统, $\lambda < \omega_0$

光腔中的里德堡原子: $\lambda/\omega_0 \sim 10^{-6}$

- $\lambda = 0$, 演化可以写为

$$\hat{a}(t) = \hat{a}(0)e^{-i\omega t}, \quad |g\rangle\langle e|_t = |g\rangle\langle e|_0 e^{-i\omega_0 t}, \quad |e\rangle\langle g|_t = |e\rangle\langle g|_0 e^{i\omega_0 t}$$

- 设 $|e\rangle\langle g| = \hat{\sigma}_+$, $|g\rangle\langle e| = \hat{\sigma}_-$

$$\hat{\sigma}_+ \hat{a} \sim e^{i(\omega_0 - \omega)t}, \quad \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger \sim e^{-i(\omega_0 - \omega)t}$$

$$\hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger \sim e^{i(\omega_0 + \omega)t}, \quad \hat{\sigma}_- \hat{a} \sim e^{-i(\omega_0 + \omega)t}$$

当 $\omega \sim \omega_0$ 时, $\hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger$ 和 $\hat{\sigma}_- \hat{a}$ 快速振荡, 其平均效果近似为零

Jaynes-Cummings 模型

$$H_{\text{JC}} = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_z + \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) + \hbar\lambda\left(\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger\right)$$

- \hat{a} 是无穷维的算符，可以取截断 N
- 维度: $2 \times N$

$$H_{\text{JC}} = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_z + \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) + \hbar\lambda\left(\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger\right)$$

- 总激发数守恒

$$\hat{N}_e = \hat{a}^\dagger\hat{a} + |e\rangle\langle e| = \hat{a}^\dagger\hat{a} + I - |g\rangle\langle g|, \quad [H_{\text{JC}}, \hat{N}_e] = 0$$

- 把哈密顿量写成两项和

$$H_{\text{JC}} = H_{\text{I}} + H_{\text{II}}$$

其中

$$H_{\text{I}} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{\hbar\omega}{2}\hat{\sigma}_z = \hbar\omega\hat{N}_e - \frac{\hbar\omega}{2}I$$

$$H_{\text{II}} = \frac{\hbar\Delta}{2}\hat{\sigma}_z + \hbar\lambda\left(\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger\right)$$

- $[H_{\text{I}}, H_{\text{II}}] = 0$, 因此可以只看 H_{II} 的动力学性质, H_{I} 对演化的贡献只是提供一个相位因子

$$|\psi(t)\rangle = [C_n^e(t)|e, n\rangle + C_{n+1}^g(t)|g, n+1\rangle] e^{-i(n+\frac{1}{2})\omega t}$$

得到方程

$$\begin{aligned}\dot{C}_n^e &= -i\frac{\Delta}{2}C_n^e - i\lambda\sqrt{n+1}C_{n+1}^g \\ \dot{C}_{n+1}^g &= i\frac{\Delta}{2}C_{n+1}^g - i\lambda\sqrt{n+1}C_n^e\end{aligned}$$

若初态是 $|e, n\rangle$, 得到解为

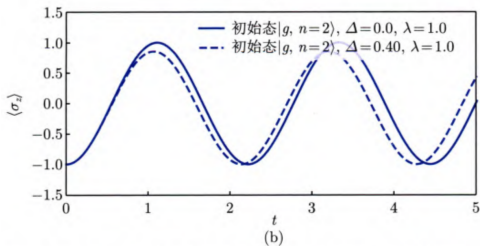
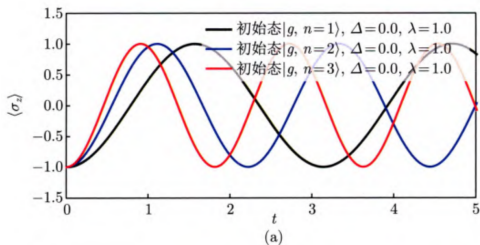
$$\begin{bmatrix} C_n^e(t) \\ C_{n+1}^g(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\Omega_n t}{2} - i\frac{\Delta}{\Omega_n} \sin \frac{\Omega_n t}{2} & -i\frac{\lambda_n}{\Omega_n} \sin \frac{\Omega_n t}{2} \\ -i\frac{\lambda_n}{\Omega_n} \sin \frac{\Omega_n t}{2} & \cos \frac{\Omega_n t}{2} + i\frac{\Delta}{\Omega_n} \sin \frac{\Omega_n t}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_n^e(0) \\ C_{n+1}^g(0) \end{bmatrix}$$

- 其中 $\lambda_n = 2\lambda\sqrt{n+1}$, $\Omega_n^2 = \Delta^2 + \lambda_n^2$
- 当初态 $C_n^e(0) = 1$ 且 $\Delta = 0$ 时, 两能级布局数差

$$W(t) = |C_n^e(t)|^2 - |C_{n+1}^g(t)|^2 = \cos(\Omega_n t)$$

- $n = 0$ 时, 振荡同样存在

Jaynes-Cummings 模型



- 一般情况，光场初态 $|\varphi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle$ ，原子初态为 $|g\rangle$

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-i(n+1/2)\omega t} \left[\cos \frac{\Omega_n t}{2} |e, g\rangle - i \sin \frac{\Omega_n t}{2} |g, n+1\rangle \right]$$

- 布局数反转

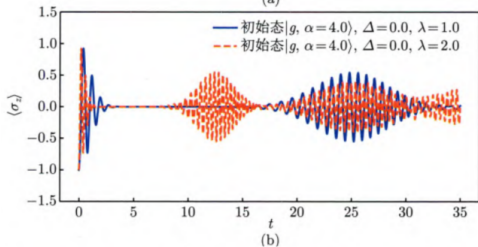
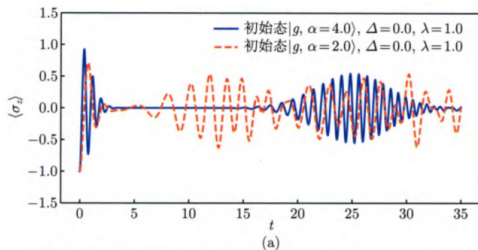
$$W(t) = \langle \psi(t) | \sigma_3 | \psi(t) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2 \cos(\Omega_n t)$$

- 若初始光场是相干态 $|\alpha\rangle$ ， $C_n = \exp(-|\alpha|^2/2) \alpha^n / \sqrt{n!}$ ，得到

$$W(t) = e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \cos(\lambda_n t)$$

已取 $\Delta = 0$

Jaynes-Cummings 模型



- 崩塌-复原现象 (collapse and revival phenomena)
- 当组成信号的模式相位一致，信号增强
- 当相位彼此相消时，信号崩塌

Jaynes-Cummings 模型

- 信号振荡周期近似由平均光子数确定

$$\Omega_{n=\langle n \rangle} t_R \sim 1 \rightarrow t_R \sim \frac{1}{\Omega_{\langle n \rangle}} \sim \frac{1}{2\lambda\sqrt{\langle n \rangle}}$$

- 崩塌时间

$$t_c [\Omega_{\langle n \rangle + \Delta n} - \Omega_{\langle n \rangle - \Delta n}] \sim 1$$

对于相干态, $\Delta n = \sqrt{\langle n \rangle}$, 从而有

$$t_c \sim \frac{1}{\Omega_{\langle n \rangle + \Delta n} - \Omega_{\langle n \rangle - \Delta n}} \sim \frac{1}{2\lambda}$$

- 复原时间

$$t_r [\Omega_{\langle n \rangle + 1} - \Omega_{\langle n \rangle}] = 2\pi m, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

近似得到

$$t_r = \frac{2\pi m}{\Omega_{\langle n \rangle + 1} - \Omega_{\langle n \rangle}} \sim \frac{2\pi m \sqrt{\langle n \rangle}}{\lambda}$$

Jaynes-Cummings 模型

- 激发数守恒 $\hat{N}_e = \hat{a}^\dagger \hat{a} + |e\rangle\langle e|$
- 在基矢 $\{|e, n\rangle, |g, n+1\rangle\}$ 展开, H 的矩阵形式为

$$H_n = \begin{pmatrix} (n + \frac{1}{2})\hbar\omega + \hbar\Delta/2 & \hbar\lambda\sqrt{n+1} \\ \hbar\lambda\sqrt{n+1} & (n + \frac{1}{2})\hbar\omega - \hbar\Delta/2 \end{pmatrix}$$

- 本征值为

$$E_{n,\pm} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega \pm \frac{1}{2} \hbar\Omega_n$$

其中 $\Omega_n = \sqrt{\Delta^2 + 4\lambda^2(n+1)}$

- 本征态

$$\begin{aligned} |n, +\rangle &= \cos\theta_n |e, n\rangle + \sin\theta_n |g, n+1\rangle \\ |n, -\rangle &= -\sin\theta_n |e, n\rangle + \cos\theta_n |g, n+1\rangle \end{aligned}$$

其中 $\cos(2\theta_n) = \frac{\Delta}{\Omega_n(\Delta)}$

- 原子和光子纠缠在一起 \rightarrow 缀饰态 (dressed state)

多光子过程的缀饰态

$$\begin{aligned} H &= \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_z + \hbar\lambda(\hat{\sigma}_+\hat{a}^2 + \sigma_-\hat{a}^{\dagger 2}) \\ &= H_{\text{I}} + H_{\text{II}} \end{aligned}$$

- 同样有守恒量

$$H_{\text{I}} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\omega\hat{\sigma}_z$$

$$H_{\text{II}} = \frac{\hbar\Delta^{(2)}}{2}\hat{\sigma}_z + \hbar\lambda(\hat{\sigma}_+\hat{a}^2 + \hat{\sigma}_-\hat{a}^{\dagger 2})$$

这里 $\Delta^{(2)} = \omega_0 - 2\omega$ 为双光子过程的失谐量

- $[H_{\text{I}}, H_{\text{II}}] = 0$
- 子空间 $\{|e, n\rangle, |g, n+2\rangle\}$

多光子过程的缀饰态

$$\begin{aligned} H &= \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_z + \hbar\lambda(\hat{\sigma}_+\hat{a}^2 + \sigma_-\hat{a}^{\dagger 2}) \\ &= H_{\text{I}} + H_{\text{II}} \end{aligned}$$

- 同样有守恒量

$$H_{\text{I}} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\omega\hat{\sigma}_z$$

$$H_{\text{II}} = \frac{\hbar\Delta^{(2)}}{2}\hat{\sigma}_z + \hbar\lambda(\hat{\sigma}_+\hat{a}^2 + \hat{\sigma}_-\hat{a}^{\dagger 2})$$

这里 $\Delta^{(2)} = \omega_0 - 2\omega$ 为双光子过程的失谐量

- $[H_{\text{I}}, H_{\text{II}}] = 0$
- 子空间 $\{|e, n\rangle, |g, n+2\rangle\}$
- 本征值

$$E = \hbar(n+1)\omega \pm \frac{1}{2}\hbar\sqrt{(\Delta^{(2)})^2 + 4\lambda^2(n+1)(n+2)}$$

- 本征态

$$|n, +\rangle = \cos\theta_n |g, n+2\rangle + \sin\theta_n |e, n\rangle$$

$$|n, -\rangle = \sin\theta_n |g, n+2\rangle + \cos\theta_n |e, n\rangle$$

Jaynes-Cummings 模型

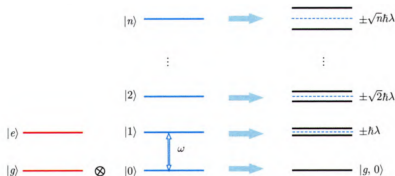


图 4.10 缀饰态的合成示意图。这里假定 $\Delta = 0$

a. 共振 $\Delta = 0$ 时，系统能级有简并

- $|g, 0\rangle \rightarrow \varepsilon_g$
- $|g, 1\rangle, |e, 0\rangle \rightarrow \varepsilon_g + \hbar\omega$
- $|g, 2\rangle, |e, 1\rangle \rightarrow \varepsilon_g + 2\hbar\omega$
- ...

b. 原子和光场的耦合使得能级劈开

大失谐近似和有效哈密顿量

$$H = \Delta \hat{\sigma}_z + \lambda(\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger)$$

- 当 $\Delta = 0$ 共振, 或者 Δ 很小, 与耦合系数相当
- Δ 远远大于耦合系数 $\Delta \gg \lambda \rightarrow$ 能级不匹配, 有效耦合大大降低
- 把耦合部分当成微扰 \rightarrow 用微扰论求解系统有效哈密顿量
光晶格、量子调控、量子计算

大失谐近似和有效哈密顿量

假定系统

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \epsilon \hat{V}$$

- \hat{H}_0 主要部分, ϵ 是小量, 代表相互作用大小
- 同时假定 \hat{H}_0 的本征系统很容易得到

$$\hat{H}_0 |m\rangle = E_m |m\rangle, \quad \langle m|\hat{V}|m\rangle = 0$$

- 正则变换

$$\begin{aligned}\hat{H}_e &= e^{\epsilon \hat{S}} \hat{H} e^{-\epsilon \hat{S}} = \hat{H} + \epsilon [\hat{S}, \hat{H}] + \frac{1}{2} \epsilon^2 [\hat{S}, [\hat{S}, \hat{H}]] + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\ &= \hat{H}_0 + \epsilon (\hat{V} + [\hat{S}, \hat{H}_0]) + \frac{1}{2} \epsilon^2 [\hat{S}, [\hat{S}, \hat{H}_0]] + \epsilon^2 [\hat{S}, \hat{V}] + \mathcal{O}(\epsilon^3)\end{aligned}$$

- 选择变换 $[\hat{S}, \hat{H}_0] = -\hat{V}$

$$\hat{H}_e = \hat{H}_0 + \frac{1}{2} \epsilon^2 [\hat{S}, \hat{V}] + \mathcal{O}(\epsilon^3)$$

Schrieffer-Wolff 变换

本质上，Schrieffer-Wolff 变换是二阶微扰论

如何找 \hat{S} ?

如何找 \hat{S} ?

- 计算 $\hat{A} = [\hat{H}_0, \hat{V}]$
- 解方程 $[\eta\hat{A}, \hat{H}_0] = -\hat{V}$, 得到 η
- $\hat{S} = \eta\hat{A}$

这个方法不适用于所有系统

例子:

$$\hat{H} = \frac{\hbar\Delta}{2}\hat{\sigma}_z + \hbar\lambda(\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger)$$

- 首先 $\hat{H}_0 = \hbar\Delta/2\hat{\sigma}_z$, $\hat{V} = \hbar\lambda(\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger)$
- 求 \hat{A}

$$\hat{A} = [\hat{H}_0, \hat{V}] = \frac{1}{2}\hbar^2\lambda\Delta(\hat{\sigma}_+\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-)$$

- 代入方程

$$[\eta\hat{A}, \hat{H}_0] - \frac{1}{2}\hbar\Delta\eta(\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger) \equiv -V$$

得到 $\eta = \lambda/\Delta$, 因此 $\hat{S} = \frac{\lambda}{\Delta}(\hat{\sigma}_+\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-)$

- 有效哈密顿量

$$H_e = \hat{H}_0 + \frac{1}{2}\epsilon^2[\hat{S}, \hat{V}] = \frac{\hbar\Delta}{2}\hat{\sigma}_z + \hbar\frac{\lambda^2}{\Delta}(\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_- + \hat{\sigma}_z\hat{a}^\dagger\hat{a})$$

Schrieffer-Wolff 变换

例子:

$$\hat{H} = \frac{\hbar\Delta}{2}\hat{\sigma}_z + \hbar\lambda(\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger)$$

大失谐下，原子能级在低阶近似不发生耦合，但是会发生能级移动

$$\begin{aligned} H_e &= \frac{\hbar\Delta}{2}\hat{\sigma}_z + \hbar\frac{\lambda^2}{\Delta}(\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_- + \hat{\sigma}_z\hat{a}^\dagger\hat{a}) \\ &= \frac{\hbar\Delta}{2}(|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|) + \hbar\frac{\lambda^2}{\Delta}(|e\rangle\langle e| + \hat{\sigma}_z\hat{a}^\dagger\hat{a}) \end{aligned}$$

例子 2: 参量下转换

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \hbar\omega_a \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar\omega_b \hat{b}^\dagger \hat{b} + \hbar g \left[\hat{a}^2 \hat{b}^\dagger + (\hat{a}^\dagger)^2 \hat{b} \right] \\ &= \left(\hbar\omega_a \hat{a}^\dagger \hat{a} + 2\omega_a \hat{b}^\dagger \hat{b} \right) + \hbar\Delta \hat{b}^\dagger \hat{b} + \hbar g \left[\hat{a}^2 \hat{b}^\dagger + (\hat{a}^\dagger)^2 \hat{b} \right]\end{aligned}$$

- 首先, 设 $\hat{H}_0 = \hbar\Delta \hat{b}^\dagger \hat{b}$, $\hat{V} = \hbar g \left[\hat{a}^2 \hat{b}^\dagger + (\hat{a}^\dagger)^2 \hat{b} \right]$
- 依照上面的方法, 可以得到 (作业)

$$\hat{S} = \frac{g}{\Delta} \left[\hat{a}^2 \hat{b}^\dagger - (\hat{a}^\dagger)^2 \hat{b} \right]$$

- 有效相互作用

$$\hat{H}_e = \hbar\Delta \hat{b}^\dagger \hat{b} + \hbar \frac{g^2}{\Delta} \left[4\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{b}^\dagger \hat{b} + 2\hat{b}^\dagger \hat{b} - (\hat{a}^\dagger)^2 \hat{a}^2 \right]$$

包含光场模式 \hat{a} 的非线性克尔效应, 同时包含两个模式交叉克尔效应

若原子和光场耦合非常强，不能使用旋波近似

$$\hat{H}_R = \Delta \hat{\sigma}_z + \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + g \hat{\sigma}_x (\hat{a}^\dagger + \hat{a})$$

- 令 $\hat{\sigma}^\pm = (\hat{\sigma}_x \pm i\hat{\sigma}_y)/2$, 可以写成

$$g \hat{\sigma}_x (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) = g(\hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}_+ \hat{a}) + g(\hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}_- \hat{a})$$

- 若 $\Delta \gg g$, 则回到 JC 模型
- Rabi 中激发数 \hat{N}_e 不再是守恒量

$$\hat{H}_R = \Delta \hat{\sigma}_z + \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + g \hat{\sigma}_x (\hat{a}^\dagger + \hat{a})$$

- Z_2 对称性

$$\hat{a} \rightarrow -\hat{a}, \quad \hat{\sigma}_x \rightarrow -\hat{\sigma}_x, \quad \hat{\sigma}_z \rightarrow \hat{\sigma}_z \implies \hat{H}_R \rightarrow H_R$$

- 算符 $\hat{\Pi} = -\hat{\sigma}_z e^{i\pi \hat{a}^\dagger \hat{a}} = -\hat{\sigma}_z (-1)^{\hat{a}^\dagger \hat{a}}$

$$\hat{\Pi} \hat{a} \hat{\Pi} = -\hat{a}, \quad \hat{\Pi} \hat{\sigma}_x \hat{\Pi} = -\hat{\sigma}_x$$

- 系统“总奇偶性”守恒
- 对易 $[\hat{H}_R, \hat{\Pi}] = 0$, 它们具有共同的本征态 ($p = \pm 1$ 表示不同宇称)

$$\hat{H}_R |\psi(p, E)\rangle = E |\psi(p, E)\rangle, \quad \hat{\Pi} |\psi(p, E)\rangle = p |\psi(p, E)\rangle$$

$$\hat{H}_R = \Delta \hat{\sigma}_z + \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + g \hat{\sigma}_x (\hat{a}^\dagger + \hat{a})$$

- 定义算符 $\hat{b} = \hat{\sigma}_x \hat{a}$, 有 $\hat{a}^\dagger \hat{a} = \hat{b}^\dagger \hat{b}$
- 宇称算符 $\hat{\Pi} = -\hat{\sigma}_z (-1)^{\hat{b}^\dagger \hat{b}}$
- 哈密顿量

$$\hat{H}_R = -\Delta (-1)^{\hat{b}^\dagger \hat{b}} \hat{\Pi} + \omega \hat{b}^\dagger \hat{b} + g(\hat{b} + \hat{b}^\dagger)$$

- 把原子 (自旋) 自由度收缩到宇称 ± 1
- Hilbert 空间 $2N \rightarrow N$

$$\hat{H}_R = \Delta \hat{\sigma}_z + \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + g \hat{\sigma}_x (\hat{a}^\dagger + \hat{a})$$

- Braak 在 2011 年给出了本征能谱
- 陈庆虎基于玻戈留波夫变换也可以得到 Rabi 模型的解析解

波函数

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \left[c_n^{\uparrow}(t) |\uparrow, n\rangle + c_n^{\downarrow}(t) |\downarrow, n\rangle \right]$$

代入薛定谔方程

$$i\dot{c}_n^{\uparrow}(t) = (n\omega + \Delta)c_n^{\uparrow}(t) + g \left(\sqrt{n}c_{n-1}^{\downarrow}(t) + \sqrt{n+1}cc_{n+1}^{\downarrow}(t) \right)$$

$$i\dot{c}_n^{\downarrow}(t) = (n\omega - \Delta)c_n^{\downarrow}(t) + g \left(\sqrt{n}c_{n-1}^{\uparrow}(t) + \sqrt{n+1}cc_{n+1}^{\uparrow}(t) \right)$$

- 两个方程分别对应宇称 $p = \pm 1$
- 不同宇称的态不会产生耦合

设初态

$$|\psi(t=0)\rangle = |\uparrow, \alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-|\alpha|^2/2} \alpha^n}{\sqrt{n!}} |\uparrow, n\rangle$$

测量布居数反转

$$P(t) = \langle \psi(t) | \hat{\sigma}_z | \psi(t) \rangle = \sum_n \left(|c_n^\uparrow|^2 - |c_n^\downarrow(t)|^2 \right)$$

- 若 $g \ll \{\omega, \Delta\}$, 系统回到 JC 模型

$$P(t) = \sum_n |c_n^\uparrow(0)|^2 \cos(2\sqrt{n+1}gt)$$

- 随着 g 增大, 布局数的崩塌-复原现象慢慢消失
- 由于反旋波项 $\hat{\sigma}_- \hat{a} + \hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger$, 不同粒子本征态的动力学相位很难同步
- g 进一步增大, $P(t)$ 再次出现崩塌-复原现象

考虑

$$\hat{H}_R = \omega \hat{b}^\dagger \hat{b} + g(\hat{b}^\dagger + \hat{b}) - \Delta(-1)^{\hat{b}^\dagger \hat{b}} \hat{\Pi}$$

- 基矢

$$\hat{b}^\dagger \hat{b} |p, n_b\rangle = n_b |p, n_b\rangle, \quad \hat{\Pi} |p, n_b\rangle = p |p, n_b\rangle, \quad p = \pm 1$$

- $\Delta = 0$ 时, 初态 $|\phi(0)\rangle = |+, 0_a\rangle$ 的演化可以写为

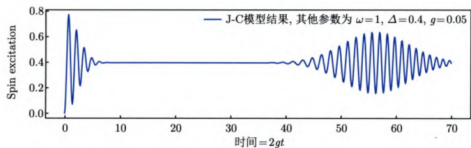
$$|\phi(t)\rangle = \exp[ig^2 t/\omega - ig^2 \sin(\omega t)/\omega^2] |+, \alpha(t)\rangle$$

其中相干态 $\alpha(t) = g(e^{-i\omega t} - 1)/\omega$, 从而

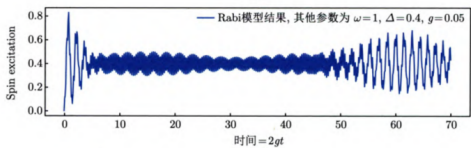
$$|\langle\phi(0)|\phi(t)\rangle|^2 = e^{-|\alpha(t)|^2}$$

其中 $\alpha(t)$ 周期 $2\pi/\omega$, 所以系统初态会周期性恢复

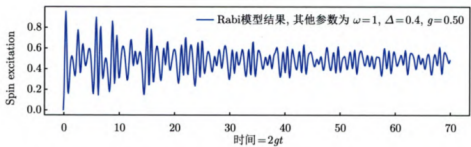
Rabi 模型



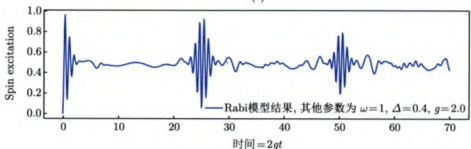
(a)



(b)

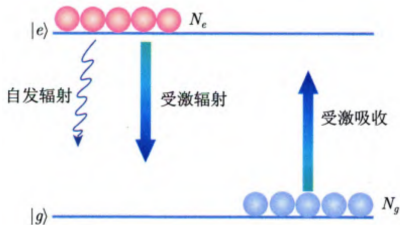


(c)



(d)

自发辐射

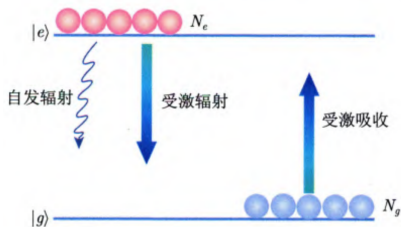


- 1917 年，爱因斯坦
- A_{eg} : 原子从激发态自发跃迁到基态的速率，系统总速率正比于处在激发态原子数 N_e
- B_{ge} : 受激吸收，系统总速率正比于处在基态的原子数，同时正比于光场能量密度 $\rho(\omega_{eg})$
- 达到稳态时，满足

$$0 = \frac{dN_e}{dt} = -N_e A_{eg} + N_g B_{ge} \rho(\omega_{eg}) \implies \rho(\omega_{eg}) = \frac{A_{eg} N_e}{B_{ge} N_g}$$

热平衡分布关系 $N_g/N_e = e^{\hbar\omega_{eg}/(k_B T)}$ ，因此 $\rho(\omega_{eg})$ 不满足黑体辐射关系

自发辐射



- 1917 年，爱因斯坦
- A_{eg} : 原子从激发态自发跃迁到基态的速率，系统总速率正比于处在激发态原子数 N_e
- B_{ge} : 受激吸收，系统总速率正比于处在基态的原子数，同时正比于光场能量密度 $\rho(\omega_{eg})$
- B_{eg} : **受激辐射**

$$0 = \frac{dN_e}{dt} = -N_e A_{eg} - N_e B_{eg} \rho(\omega_{eg}) + N_g B_{ge} \rho(\omega_{eg})$$

自发辐射

稳态辐射场

$$\rho(\omega_{ge}) = \frac{N_e A_{eg}}{N_g B_{ge} - N_e B_{eg}} = \frac{A_{eg}}{B_{eg}} \frac{1}{\frac{B_{ge}}{B_{eg}} e^{\hbar\omega_{eg}/(k_B T)} - 1}$$

- 与黑体辐射公式对比 $\rho \sim \left[e^{-\hbar\omega_{eg}/(k_B T)} - 1 \right]^{-1}$ 可知

$$B_{eg} = B_{ge}$$

自发辐射的量子化处理

自发辐射看作时原子与多模式电磁场耦合导致：

$$\hat{H}_I = \hbar \sum_{\lambda} \left(g_{\lambda} |e\rangle\langle g| \hat{a}_{\lambda} e^{-i\delta\omega_{\lambda}t} + \text{H. c.} \right)$$

- 自发辐射是随机的，因此方向是任意的
- 假定 ω_{λ} 是辐射频率， $\delta\omega_l = \omega_l - \omega_{eg}$
- 波函数

$$|\phi(t)\rangle = |\phi(0)\rangle + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t \hat{H}_I(\tau) |\phi(\tau)\rangle$$

自发辐射的量子化处理

自发辐射看作时原子与多模式电磁场耦合导致：

$$\hat{H}_I = \hbar \sum_{\lambda} \left(g_{\lambda} |e\rangle\langle g| \hat{a}_{\lambda} e^{-i\delta\omega_{\lambda}t} + \text{H. c.} \right)$$

- 自发辐射是随机的，因此方向是任意的
- 假定 ω_{λ} 是辐射频率， $\delta\omega_l = \omega_l - \omega_{eg}$
- 波函数

$$|\phi(t)\rangle^{(1)} = |\phi(0)\rangle + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t \hat{H}_I(\tau) |\phi(0)\rangle$$

自发辐射的量子化处理

自发辐射 (spontaneous emission):

- 初态 $|e\rangle |0\rangle$, 即原子在激发态, 光场处在真空态

$$|e\rangle |0\rangle \rightarrow |g\rangle |1_\lambda\rangle$$

- 一阶近似波函数

$$|\phi(t)\rangle^{(1)} = |e\rangle |0\rangle + \sum_{\lambda} g_{\lambda}^* \frac{1}{\delta\omega_{\lambda}} \left(1 - e^{i\delta\omega_{\lambda}t}\right) |g\rangle |1_{\lambda}\rangle$$

- 辐射一个光子的概率

$$\sum_{\lambda} \left| \frac{g_{\lambda}}{\delta\omega_{\lambda}} \right|^2 \left| 1 - e^{i\delta\omega_{\lambda}t} \right|^2$$

- 跃迁概率 (需要 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin \omega t}{t} = \pi \delta(\omega)$)

$$P = \sum_l |g_{\lambda}|^2 \frac{\sin \delta\omega_{\lambda}t}{\delta\omega_{\lambda}} = 2\pi \sum_l |g_{\lambda}|^2 \delta(\omega_{\lambda} - \omega_{eg})$$

也称为**费米黄金规则** (Fermi's golden rule)

自发辐射的量子化处理

自发辐射 (spontaneous emission):

- 初态 $|e\rangle |0\rangle$, 即原子在激发态, 光场处在真空态

$$|e\rangle |0\rangle \rightarrow |g\rangle |1_\lambda\rangle$$

- 一阶近似波函数

$$|\phi(t)\rangle^{(1)} = |e\rangle |0\rangle + \sum_\lambda g_\lambda^* \frac{1}{\delta\omega_\lambda} \left(1 - e^{i\delta\omega_\lambda t}\right) |g\rangle |1_\lambda\rangle$$

- 辐射一个光子的概率

$$\sum_\lambda \left| \frac{g_\lambda}{\delta\omega_\lambda} \right|^2 \left| 1 - e^{i\delta\omega_\lambda t} \right|^2$$

- 跃迁概率 (需要 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin \omega t}{t} = \pi \delta(\omega)$)

$$P = \frac{2\pi}{\hbar^2} \left| \langle f | \hat{H}_I | i \rangle \right|^2 \rho_f$$

也称为费米黄金规则 (Fermi's golden rule)

自发辐射的量子化处理

耦合系数

$$g_{\lambda} = -i\sqrt{\frac{\omega_{\lambda}}{2\epsilon_0\hbar V}}\mathbf{d}_{eg} \cdot \mathbf{e}_{\sigma}$$

空间立体角 $d\Omega$ 内模式数量为

$$dN = \frac{V}{(2\pi)^3}k^2 dk d\Omega$$

从而得到

$$P = \frac{\omega_{eg}^3}{8\pi^2\hbar\epsilon_0c^3}|\mathbf{e} \cdot \mathbf{d}_{eg}|^2 d\Omega$$

自发辐射的量子化处理

受激辐射 (stimulated emission):

- 初态 $|e\rangle |n_{\lambda_0}\rangle$, 辐射光子模式用 λ 表示
 1. 若 $\lambda \neq \lambda_0$, 末态 $|g\rangle |n_{\lambda_0}, 1_{\lambda}\rangle$
 2. 若 $\lambda = \lambda_0$, 末态为 $|g\rangle |(n+1)_{\lambda_0}\rangle$
- 利用费米黄金规则

$$\begin{aligned} P &= 2\pi |g_{\lambda_0}|^2 \delta(\omega_{\lambda_0} - \omega_{eg})(n+1) + 2\pi \sum_{\lambda \neq \lambda_0} |g_{\lambda}|^2 \delta(\omega_{\lambda_0} - \omega_{eg}) \\ &= 2\pi |g_{\lambda_0}|^2 \delta(\omega_{\lambda_0} - \omega_{eg})n + 2\pi \sum_{\lambda} |g_{\lambda}|^2 \delta(\omega_{\lambda_0} - \omega_{eg}) \end{aligned}$$

- 第二项对应自发辐射, 第一项即为受激辐射

$$P_{st} = 2\pi n |g_{\lambda_0}|^2 \delta(\omega_{\lambda_0} - \omega_{eg})$$

正比于光场强度 n

受激辐射

- 光场穿过原子，会同时发生受激辐射和受激吸收
- 一般情况，原子处在基态原子数 N_g 远大于处在激发态原子数 N_e ，因此光场经过介质后强度总是减弱
- 激光中，发生粒子数反转 $N_e \gg N_g$ ：受激辐射占主导

单原子与光场相互作用 \rightarrow 多原子与光场相互作用?

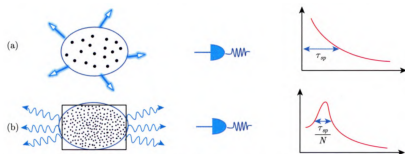
量子光场与原子的相互作用

特性	JC 模型	Rabi 模型	Dicke 模型	三能级暗态模型
原子数目	1	1	N	通常 1
原子能级	2 能级	2 能级	2 能级	3 能级
旋波近似 (RWA)	有 (丢弃反旋项)	无 (保留反旋项)	有/无	通常有
对称性	$U(1)$ 连续对称性	\mathbb{Z}_2 宇称对称性	\mathbb{Z}_2 宇称对称性	取决于驱动相位
激发数守恒	守恒	不守恒	不守恒	不守恒
核心现象	真空 Rabi 分裂	量子 Rabi 振荡	超辐射相变	EIT / CPT
适用条件	弱/中等耦合	强/超强耦合	热力学极限 ($N \rightarrow \infty$)	多场驱动干涉

Dicke 模型和超辐射

$N \gg 1$ 个原子和光场耦合

- 稀薄的原子系统 \rightarrow 原子是独立的，辐射场几乎互不相干 \rightarrow 辐射场是单个原子辐射光场的 N 倍，光场会随着时间指数衰减
- 原子密度增大到一定程度，近邻原子之间的辐射光场有很大概率重叠，形成干涉效应

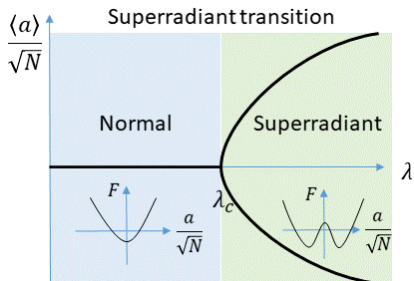


- 辐射场是单个原子辐射光场的 N^2 倍

Dicke 模型和超辐射

Dicke 超辐射图像

- 原子数变多，原子之间的距离变小 \rightarrow 光场的波长远大于原子之间的距离 \rightarrow 不同原子在光波长尺度下不可区分
- 辐射初始，由于真空涨落，不同原子的辐射互不相干
- 有一定辐射后，光场会诱导原子的偶极矩发生同步振荡 \rightarrow 原子辐射光场形成干涉增强



$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\frac{\omega_0}{2}\sum_{i=1}^N\hat{\sigma}_z^{(i)} + \frac{\hbar g}{\sqrt{N}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a})\left(\hat{\sigma}_+^{(i)} + \hat{\sigma}_-^{(i)}\right)$$

- N 个原子, i 为原子编号
- 升降算符

$$\hat{\sigma}_\pm = \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_x \pm i\hat{\sigma}_y), \quad [\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_\pm] = \pm\hat{\sigma}_\pm, \quad [\hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_-] = \hat{\sigma}_z$$

- 由于原子不可分辨, 定义集体算符

$$\hat{J}_\alpha = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N\hat{\sigma}_\alpha^{(i)}, \quad \sigma = \{x, y, z\}$$

$$\hat{J}_\pm = \sum_{i=1}^N\hat{\sigma}_\pm^{(i)}$$

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\omega_0\hat{J}_z + \frac{\hbar g}{\sqrt{N}} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) (\hat{J}_+ + \hat{J}_-)$$

- 总角动量 $\hat{J}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2$

$$\begin{aligned}\hat{J}^2 |j, m\rangle &= j(j+1) |j, m\rangle, & \hat{J}_z |j, m\rangle &= m |j, m\rangle, \\ \hat{J}_\pm |j, m\rangle &= \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} |j, m \pm 1\rangle\end{aligned}$$

其中 $j = 0$ or $\frac{1}{2}, \dots, \frac{N-2}{2}, \frac{N}{2}$

- 有 $[\hat{J}_z, \hat{J}^2] = 0$, $[\hat{J}_x, \hat{J}^2] = 0$, 因此总角动量 \hat{J}^2 和 \hat{H} 对易

$$[\hat{J}^2, \hat{H}] = 0$$

Dicke 模型和超辐射

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\omega_0\hat{J}_z + \frac{\hbar g}{\sqrt{N}} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) (\hat{J}_+ + \hat{J}_-)$$

\hat{J}_- 和 \hat{J}_+ 联系的子空间:

$$|j, m\rangle = \frac{1}{(j+m)!} \frac{1}{\sqrt{C_{2j}^{j+m}}} \hat{J}_+^{j+m} |j, -j\rangle$$

- N 个原子组成的空间维度: $2^N \rightarrow$ 分成相互正交的子空间
- j 也被 Dicke 称作合作数
- 对于每个 j 的子空间的重数

$$D_j = (2j+1) \frac{N!}{(N/2+j+1)!(N/2-j)!}$$

宇称对称性 $\hat{\Pi}$

- $\hat{a} \rightarrow -\hat{a}, \hat{a}^\dagger \rightarrow -\hat{a}^\dagger$
- $\hat{J}_x \rightarrow -\hat{J}_x, \hat{J}_y \rightarrow -\hat{J}_y, \hat{J}_z \rightarrow \hat{J}_z$

因此

$$[\hat{H}, \hat{\Pi}] = 0$$

在 \mathbb{Z}_2 宇称变换下, 哈密顿量不变

$$\hat{H}|\psi\rangle = \varepsilon_i|\psi\rangle, \quad \hat{\Pi}|\psi\rangle = \pm|\psi\rangle$$

$$\begin{aligned}\langle \psi | \hat{a} | \psi \rangle &= \langle \psi | \hat{\Pi}^\dagger \hat{\Pi} \hat{a} \hat{\Pi}^\dagger \hat{\Pi} | \psi \rangle \\ &= \langle \psi | \hat{\Pi}^\dagger (-\hat{a}) \hat{\Pi} | \psi \rangle = -\langle \psi | \hat{a} | \psi \rangle\end{aligned}$$

正常态下，光子数为零

对称性完好 \rightarrow 场期望值为零 \rightarrow 宏观光子数为零

- 基态

$$|g\rangle \rightarrow |0\rangle_{\text{photon}} \otimes |\downarrow \downarrow \dots \downarrow\rangle$$

- 原子处在基态且 $\langle \hat{J}_x \rangle = 0$
- 基态是非简并的，是宇称算符本征态，对称性保持

相互作用表象下，利用旋波近似：

$$\frac{\hbar}{\sqrt{N}}g \left(\hat{a}^\dagger \hat{J}_- + \hat{a} \hat{J}_+ \right)$$

- 总角动量守恒， j 是好量子数： $\Delta j = 0$, $\Delta m = 1$
- 依据费米黄金规则，与自发辐射速率的矩阵元

$$\left| \langle j, m-1 | \hat{J}_- | j, m \rangle \right|^2 = (j-m+1)(j+m)$$

- 如果只有一个原子 $j = m = 1/2$ ，上式为 1，假定单原子辐射速率为 I_0

相互作用表象下，利用旋波近似：

$$\frac{\hbar}{\sqrt{N}}g \left(\hat{a}^\dagger \hat{J}_- + \hat{a} \hat{J}_+ \right)$$

- 对于 Dicke 态 $j = N/2$ ，辐射速率

$$I = \left(\frac{N}{2} - m + 1 \right) \left(\frac{N}{2} + m \right) I_0$$

- 当所有原子处在激发态，此时 $m = N/2$ ，对应的辐射速率 $I = NI_0$
- 当半数原子激发，此时 $m = 0$ ，辐射速率 $I = \frac{N}{2} \left(\frac{N}{2} + 1 \right) I_0$
正比于 N^2 ，系统发生超辐射

Dicke 模型和超辐射

原子集体自旋相干态对应的自发辐射

- 对于给定的自旋相干态 $|\theta, \phi\rangle$, 其自发辐射速率正比于

$$\langle \theta, \phi | \hat{J}_+ \hat{J}_- | \theta, \phi \rangle = \left(\frac{N}{2} \right)^2 \sin^3 \theta + 2 \left(\frac{N}{2} \right) \sin^4 \frac{\theta}{2}$$

- 当 $\theta = \pi/2$, 上式正比于 $N^2/4$
- 对于自旋相干态, 自旋平均值

$$\langle \theta, \phi | \{J_x, J_y, J_z\} | \theta, \phi \rangle = \frac{N}{2} (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \neq 0$$

原子具有宏观集体偶极矩, 从而可以从经典偶极辐射的角度来理解超辐射

Dicke 模型和超辐射

原子集体自旋相干态对应的自发辐射

- 对于给定的自旋相干态 $|\theta, \phi\rangle$, 其自发辐射速率正比于

$$\langle \theta, \phi | \hat{J}_+ \hat{J}_- | \theta, \phi \rangle = \left(\frac{N}{2} \right)^2 \sin^3 \theta + 2 \left(\frac{N}{2} \right) \sin^4 \frac{\theta}{2}$$

- 当 $\theta = \pi/2$, 上式正比于 $N^2/4$
- 对于自旋相干态, 自旋平均值

$$\langle \theta, \phi | \{J_x, J_y, J_z\} | \theta, \phi \rangle = \frac{N}{2} (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \neq 0$$

原子具有宏观集体偶极矩, 从而可以从经典偶极辐射的角度来理解超辐射

- 而 Dicke 超辐射起源于原子的关联特性: 当 $m = 0$ 时

$$\left\langle \frac{N}{2}, 0 \left| J_{\pm} \right| \frac{N}{2}, 0 \right\rangle = 0$$

原子的集体角动量 (J_x, J_y, J_z) 在各个方向的投影平均值都是零, 所以不能简单地把原子集体看成一个经典的宏观偶极矩来理解

Dicke 模型和超辐射

$$\hat{H} = \hbar\omega_a \hat{J}_z + \hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\hbar g}{\sqrt{N}} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) (\hat{J}_+ + \hat{J}_-)$$

- 当耦合系数很弱 $g \ll (\omega_a, \omega)$, \hat{H} 前两项占主导, 系统基态近似为原子和光场直积态
- 耦合系数增强后 $g \gg (\omega_a, \omega)$, 耦合项占主导, 要使能量最低

$$\begin{cases} \langle \hat{J}_x \rangle = N/2, & \langle \hat{a} + \hat{a}^\dagger \rangle < 0 \\ \langle \hat{J}_x \rangle = -N/2, & \langle \hat{a} + \hat{a}^\dagger \rangle > 0 \end{cases}$$

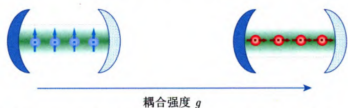


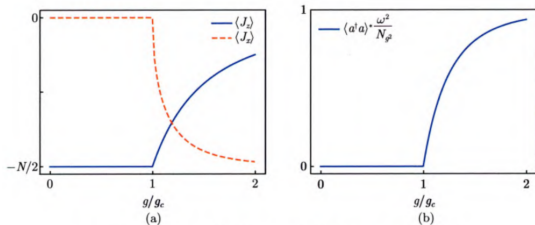
图 4.17 Dicke 相变示意图。当耦合系数 g 很小时, 基态的自旋沿竖直方向排列。增大耦合强度后, 基态自旋沿水平方向排列

Dicke 模型和超辐射

$$\hat{H} = \hbar\omega_a \hat{J}_z + \hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\hbar g}{\sqrt{N}} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) (\hat{J}_+ + \hat{J}_-)$$

- 当耦合系数很弱 $g \ll (\omega_a, \omega)$, \hat{H} 前两项占主导, 系统基态近似为原子和光场直积态
- 耦合系数增强后 $g \gg (\omega_a, \omega)$, 耦合项占主导, 要使能量最低

$$\begin{cases} \langle \hat{J}_x \rangle = N/2, & \langle \hat{a} + \hat{a}^\dagger \rangle < 0 \\ \langle \hat{J}_x \rangle = -N/2, & \langle \hat{a} + \hat{a}^\dagger \rangle > 0 \end{cases}$$



如何找到相变点位置?

Dicke 模型和超辐射

做 Holstein-Primakoff 变换

角动量算符 \rightarrow 玻色算符

做 Holstein-Primakoff 变换

$$\hat{J}_z = \hat{b}^\dagger \hat{b} - N/2, \quad \hat{J}_+ = \hat{b}^\dagger \sqrt{N - \hat{b}^\dagger \hat{b}}, \quad \hat{J}_- = \sqrt{N - \hat{b}^\dagger \hat{b}} \hat{b}$$

满足

$$\begin{aligned} \hat{J}_+ |J, M\rangle &= \sqrt{J(J+1) - M(M+1)} |J, M+1\rangle \\ \implies \hat{b}^\dagger \sqrt{N - \hat{b}^\dagger \hat{b}} |J+M\rangle &= \sqrt{(J-M)(J+M+1)} |J+M+1\rangle \end{aligned}$$

$$\hat{J}_z |J, M\rangle = M |J, M\rangle \implies (\hat{b}^\dagger \hat{b} - N/2) |J+M\rangle = M |J+M\rangle$$

- 角动量态和 Fock 态的变换

$$|J, M\rangle \rightarrow |J+M\rangle$$

- 例: $J = N/2$: 当 $M = -N/2$ 时, 原子处在基态

变换后

$$\hat{H} = \hbar\omega_a(\hat{b}^\dagger\hat{b} - N/2) + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{\hbar g}{\sqrt{N}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a})\left(\hat{b}^\dagger\sqrt{N - \hat{b}^\dagger\hat{b}} + \sqrt{N - \hat{b}^\dagger\hat{b}}\hat{b}\right)$$

- 平均场

$$\hat{a} = \sqrt{N}\alpha + \hat{c}, \quad \hat{b} = \sqrt{N}\beta + \hat{d}$$

- \hat{c} 和 \hat{d} 是涨落: $\langle \hat{c} \rangle = \langle \hat{d} \rangle = 0$
- 热力学极限 $N \rightarrow \infty$, 可以只保留主导项

$$\hat{H} = N \left[\hat{\omega}_a(\beta^2 - 1/2) + \hbar\omega\alpha^2 + 4\hbar g\alpha\beta\sqrt{1 - \beta^2} \right] + \mathcal{O}(\sqrt{N})$$

Dicke 模型和超辐射

$$h^{(0)} = \hbar\omega_a(\beta^2 - 1/2) + \hbar\omega\alpha^2 + 4\hbar g\alpha\beta\sqrt{1 - \beta^2}$$

令 $h^{(0)}$ 的一阶偏微分为零

$$\frac{\partial h^{(0)}}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial h^{(0)}}{\partial \beta} = 0$$

得到

$$\begin{aligned}\omega\alpha + 2g\beta\sqrt{1 - \beta^2} &= 0 \\ \omega_a\beta + 2g\alpha\sqrt{1 - \beta^2} - \frac{2g\alpha\beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} &= 0\end{aligned}$$

Dicke 模型和超辐射

$$h^{(0)} = \hbar\omega_a(\beta^2 - 1/2) + \hbar\omega\alpha^2 + 4\hbar g\alpha\beta\sqrt{1 - \beta^2}$$

令 $h^{(0)}$ 的一阶偏微分为零

$$\frac{\partial h^{(0)}}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial h^{(0)}}{\partial \beta} = 0$$

得到

$$\begin{aligned}\omega\alpha + 2g\beta\sqrt{1 - \beta^2} &= 0 \\ \beta + 2g\frac{-2g\beta}{\omega\omega_a}(1 - \beta^2) + 2g\beta^2\frac{2g\beta}{\omega\omega_a} &= 0\end{aligned}$$

$$h^{(0)} = \hbar\omega_a(\beta^2 - 1/2) + \hbar\omega\alpha^2 + 4\hbar g\alpha\beta\sqrt{1 - \beta^2}$$

令 $h^{(0)}$ 的一阶偏微分为零

$$\frac{\partial h^{(0)}}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial h^{(0)}}{\partial \beta} = 0$$

得到

$$\begin{aligned} \omega\alpha + 2g\beta\sqrt{1 - \beta^2} &= 0 \\ \beta \left[1 - \frac{4g^2}{\omega\omega_a}(1 - 2\beta^2) \right] &= 0 \end{aligned}$$

$$h^{(0)} = \hbar\omega_a(\beta^2 - 1/2) + \hbar\omega\alpha^2 + 4\hbar g\alpha\beta\sqrt{1 - \beta^2}$$

令 $h^{(0)}$ 的一阶偏微分为零

$$\frac{\partial h^{(0)}}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial h^{(0)}}{\partial \beta} = 0$$

得到两组解, 设 $\gamma = g/g_c$, $g_c = \sqrt{\omega_a\omega}/2$

$$\begin{cases} \alpha_n = 0 \\ \beta_n = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha_s = \mp \frac{g}{\omega} \sqrt{1 - \gamma^{-4}} \\ \beta_s = \pm \sqrt{1 - \gamma^{-2}}/\sqrt{2} \end{cases}$$

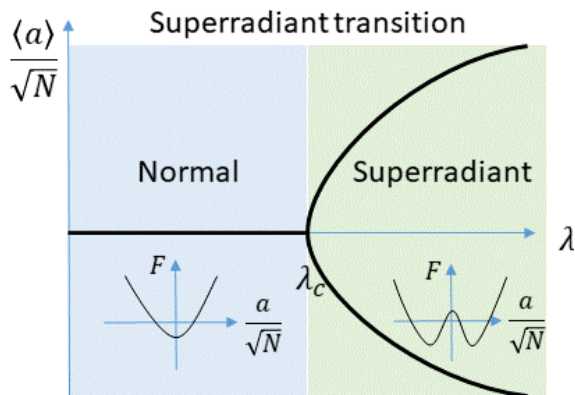
对应能量

$$h^{(0)} = \begin{cases} -\frac{1}{2}\hbar\omega_a, & \text{normal state } \gamma < 1 \\ -\frac{1}{4}\hbar\omega_a (\gamma^2 + \gamma^{-2}), & \text{superradiance } \gamma \geq 1 \end{cases}$$

- 超辐射态：自发对称破缺

	Normal phase	Superradiant phase
Ground state	Unique	Doubly degenerate
$\langle \hat{a} + \hat{a}^\dagger \rangle$	0	$\pm \alpha_0$
$\langle \hat{J}_x \rangle$	0	$\neq 0$
Parity	Definite eigenstate	Not a parity eigenstate
Symmetry status	Preserved	Spontaneously broken

Dicke 模型和超辐射



- 能隙：随着 g 逐渐增大接近 g_c ，系统最低激发态降低
- 当 $g \rightarrow g_c$ ，正常态变得不稳定，系统向超辐射态倾斜 \rightarrow 二级相变

- 两个态

$$\begin{cases} |+\rangle & \langle \hat{a} \rangle = \alpha_0 \\ |-\rangle & \langle \hat{a} \rangle = -\alpha_0 \end{cases}$$

- 两个态由 $\hat{\Pi}$ 连接

$$\hat{\Pi}|+\rangle = |-\rangle, \quad \hat{\Pi}|-\rangle = |+\rangle$$

- $\hat{\Pi}$ 的本征态为

$$|g_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle), \quad |g_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle)$$

- 两个态

$$\begin{cases} |+\rangle & \langle \hat{a} \rangle = \alpha_0 \\ |-\rangle & \langle \hat{a} \rangle = -\alpha_0 \end{cases}$$

- 两个态由 $\hat{\Pi}$ 连接

$$\hat{\Pi}|+\rangle = |-\rangle, \quad \hat{\Pi}|-\rangle = |+\rangle$$

- $\hat{\Pi}$ 的本征态为

$$|g_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle), \quad |g_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle)$$

问题：为什么系统会选择落在 $|+\rangle$ 或者 $|-\rangle$ ，而不是 $|g_1\rangle$ 或者 $|g_2\rangle$ ？

实验：光场和 BEC 耦合

Vol 464 | 29 April 2010 | doi:10.1038/nature09009

nature

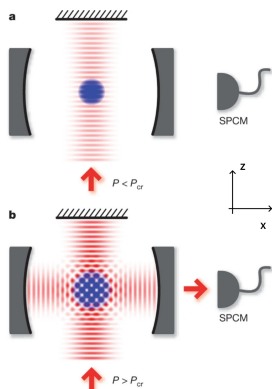
ARTICLES

Dicke quantum phase transition with a superfluid gas in an optical cavity

Kristian Baumann¹, Christine Guerlin^{1,†}, Ferdinand Brennecke¹ & Tilman Esslinger¹

A phase transition describes the sudden change of state of a physical system, such as melting or freezing. Quantum gases provide the opportunity to establish a direct link between experiments and generic models that capture the underlying physics. The Dicke model describes a collective matter–light interaction and has been predicted to show an intriguing quantum phase transition. Here we realize the Dicke quantum phase transition in an open system formed by a Bose–Einstein condensate coupled to an optical cavity, and observe the emergence of a self-organized supersolid phase. The phase transition is driven by infinitely long-range interactions between the condensed atoms, induced by two-photon processes involving the cavity mode and a pump field. We show that the phase transition is described by the Dicke Hamiltonian, including counter-rotating coupling terms, and that the supersolid phase is associated with a spontaneously broken spatial symmetry. The boundary of the phase transition is mapped out in quantitative agreement with the Dicke model. Our results should facilitate studies of quantum gases with long-range interactions and provide access to novel quantum phases.

Dicke 模型和超辐射



From Nature 464, 1301–1306 (2010)

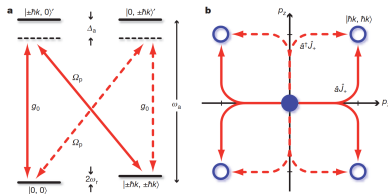
- 10^5 个 ^{87}Rb 原子束缚在光腔
电子 37, 质子 37, 中子 50 \rightarrow 总费米子数 124 \rightarrow 玻色子
- 玻色爱因斯坦凝聚态与光腔耦合

$$H_{(1)} = \frac{p_x^2 + p_z^2}{2m} + V_0 \cos^2(kz) + \hbar\eta(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \cos(kx) \cos(kz) - \hbar(\Delta - U_0 \cos^2(kx))\hat{a}^\dagger \hat{a}$$

Dicke 模型和超辐射

Bloch 态

- BEC 凝聚态动量为零的态 $\Psi_0 = |p_x, p_z\rangle = |0, 0\rangle$
- $|0, 0\rangle$ 吸收一个驻波光子, 释放一个腔模光子 $\rightarrow \Psi_1 = |\pm\hbar k, \pm\hbar k\rangle$
- $|0, 0\rangle$ 吸收一个腔模光子, 释放一个驻波光子 $\rightarrow \Psi_1 = |\pm\hbar k, \pm\hbar k\rangle$



Ladder operator

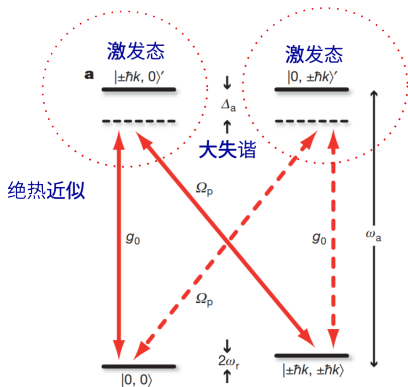
$$\hat{J}_+ = \sum_i |\pm\hbar k, \pm\hbar k\rangle_i \langle 0, 0|$$

光场与原子相互作用

$$\frac{\hbar\lambda}{\sqrt{N}} (\hat{a}^\dagger + \hat{a})(\hat{J}_+ + \hat{J}_-)$$

Dicke 模型和超辐射

两个 Λ -type 耦合



- 第一个

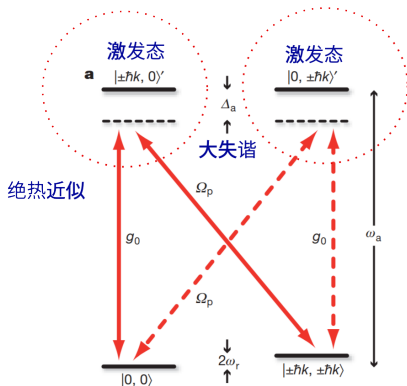
$$\Omega_p \cos(kz) |0, 0\rangle\langle 0, \pm\hbar k| + g_0 \cos(kx) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) |0, \pm\hbar k\rangle\langle \pm\hbar k, \pm\hbar k| + \text{H. c.}$$

- 第二个

$$g_0 \cos(kx) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) |0, 0\rangle\langle \pm\hbar k, 0| + \Omega_p \cos(kz) |\pm\hbar k, 0\rangle\langle \pm\hbar k, \pm\hbar k| + \text{H. c.}$$

Dicke 模型和超辐射

两个 Λ -type 耦合



绝热近似，大失谐近似，二阶微扰

$$\sim \frac{\Omega_p g_0}{\Delta_a} \cos(kx) \cos(kz) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) |0, 0\rangle \langle \pm\hbar k, \pm\hbar k|$$

$$+ \frac{g_0 g_0^*}{\Delta_a} \cos^2(kx) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) (|0, 0\rangle \langle 0, 0| + |\pm\hbar k, \pm\hbar k\rangle \langle \pm\hbar k, \pm\hbar k|)$$

$$H = \int \Psi^\dagger(x, z) H_{(1)} \Psi(x, z) dx dz$$

- 临界值以下，光场平均值为零，所有原子处最低的 Bloch 态：原子相当于一维晶格模型

$$V = \frac{p_z^2}{2m} + V_0 \cos^2(kz)$$

- 腔模增强使得 Ψ_0 与 $\Psi_1 \propto \Psi_0 \cos(kx) \cos(kz)$
- 把 $\Psi = \Psi_0 \hat{c}_0 + \Psi_1 \hat{c}_1$ 代入哈密顿量，得到

$$H/\hbar = \omega_0 \hat{J}_z + \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\lambda}{\sqrt{N}} (\hat{a}^\dagger + \hat{a})(\hat{J}_+ + \hat{J}_-) + U_0 M \hat{c}_1^\dagger \hat{c}_1 \hat{c}_0^\dagger \hat{c}_0$$

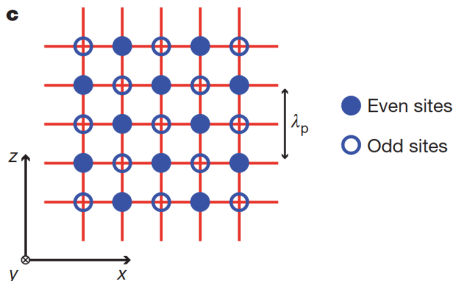
Dicke 模型和超辐射

η 增强后, 系统进入超辐射态, 为了降低能量

$$\hbar\eta(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \cos(kx) \cos(kz)$$

激发模式

$$\Psi_1 \propto \Psi_0 \cos(kx) \cos(kz)$$



原子倾向于待在偶格子或者奇格子

From Nature 464, 1301–1306 (2010)

第四章

原子光场耦合及电偶极近似

经典光场与原子的相互作用

量子光场与原子的相互作用

Jaynes-Cummings 模型

Rabi 模型

Dicke 模型和超辐射

总结

Summary

- 经典光场与原子的相互作用
- 量子光场与原子的相互作用
- JC 模型、Rabi 模型、Dicke 模型
- 光场对原子、原子团的调控