

量子光学

第五章 热库系统与主方程

黄月新

大湾区大学 理学院

2026 年 5 月 21 日

课程大纲

量子光学是研究光场的量子性质，及其与原子、分子等物质相互作用的物理学分支，核心内容包括光子的产生、操控与探测以及光-物质的量子相干与纠缠现象。

第一章 辐射场及其量子化 (2 次课)

第二章 量子相干态 (3 次课)

第三章 光场相干性及其干涉 (3 次课)

第四章 光场与原子相互作用 (4 次课)

第五章 热库系统与主方程 (2 次课)

第六章 激光冷却技术 (2 次课)

第七章 光学腔和光力耦合系统 (2 次课)

参考资料

- 《量子光学》，郭光灿，周祥发，科学出版社
- Quantum Optics, Marlan O. Scully, M. Suhail Zubairy, Cambridge University Press
- 维基百科 (wikipedia.org)
- Brasil et al., A simple derivation of the Lindblad equation, Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 35, n. 1, 1303 (2013)

第五章

约化系统中的动力学演化

共振荧光

暗态和电磁诱导透明效应 (EIT)
巨克尔效应

四波混频

总结

第五章

约化系统中的动力学演化

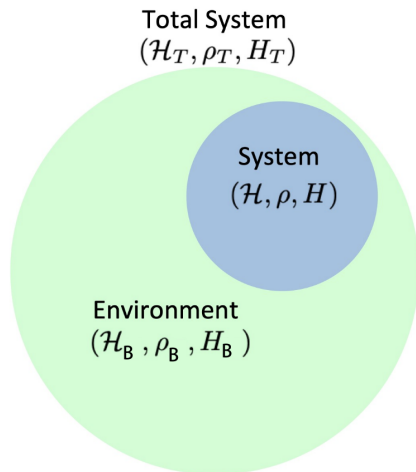
共振荧光

暗态和电磁诱导透明效应 (EIT)
巨克尔效应

四波混频

总结

约化系统中的动力学演化



- 通常无法得到严格解
- 热库很大

约化系统中的动力学演化

非厄米方法

$$\hat{H} = \hbar\omega_{eg} (|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|) - i\hbar\frac{\gamma}{2} |e\rangle\langle e|$$

波函数 $|\psi\rangle = c_g |g\rangle + c_e |e\rangle$ 的演化

$$i\dot{c}_g = -\omega_{eg}c_g, \quad i\dot{c}_e = \left(\omega_{eg} - i\frac{\gamma}{2}\right)c_e$$

- 波函数不归一
- 只能处理短时、弱耦合问题
- 跃迁问题
- 只能处理纯态问题

约化系统中的动力学演化

$$\hat{H} = \hat{H}_S \otimes \hat{I}_B + \hat{I}_S \otimes \hat{H}_B + \alpha \hat{H}_{SB}$$

- 热库（环境）和系统的耦合非常弱，假定库一直处在初态

$$\hat{\rho}(t) \approx \hat{\rho}_S(t) \otimes \hat{\rho}_B(0)$$

↓

波恩近似

- 刘维尔方程

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}_{SB} = -\frac{i}{\hbar} \left[\hat{H}_S + \hat{H}_B + \alpha \hat{H}_{SB}, \hat{\rho}_{SB} \right]$$

约化系统中的动力学演化

相互作用表象下

$$\begin{aligned}\hat{H}(t) &= e^{i(\hat{H}_S + \hat{H}_B)t/\hbar} \hat{H}_{SB} e^{-i(\hat{H}_S + \hat{H}_B)t/\hbar} \\ \hat{\rho} &= e^{i(\hat{H}_S + \hat{H}_B)t/\hbar} \hat{\rho}_{SB}(t) e^{-i(\hat{H}_S + \hat{H}_B)t/\hbar}\end{aligned}$$

运动方程

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = -\frac{i}{\hbar} \alpha \left[\hat{H}(t), \hat{\rho}(t) \right]$$

积分得到

$$\hat{\rho}(t) = \hat{\rho}(0) - \frac{i}{\hbar} \alpha \int_0^t \left[\hat{H}(t'), \hat{\rho}(t') \right] dt'$$

约化系统中的动力学演化

相互作用表象下

$$\hat{H}(t) = e^{i(\hat{H}_S + \hat{H}_B)t/\hbar} \hat{H}_{SB} e^{-i(\hat{H}_S + \hat{H}_B)t/\hbar}$$
$$\hat{\rho} = e^{i(\hat{H}_S + \hat{H}_B)t/\hbar} \hat{\rho}_{SB}(t) e^{-i(\hat{H}_S + \hat{H}_B)t/\hbar}$$

运动方程

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = -\frac{i}{\hbar} \alpha [\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)]$$

积分得到

$$\hat{\rho}(t) = \hat{\rho}(0) - \frac{i}{\hbar} \alpha \int_0^t [\hat{H}(t'), \hat{\rho}(t')] dt'$$

代回运动方程

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}(t), \hat{\rho}(0)] - \frac{\alpha^2}{\hbar^2} \left[\hat{H}(t), \int_0^t [\hat{H}(t'), \hat{\rho}(t')] dt' \right]$$

↓

只关心系统 S 的运动状态

积掉环境自由度

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}_S(t) = -\frac{i}{\hbar} \alpha \text{Tr}_B \left[\hat{H}(t), \hat{\rho}(0) \right] - \frac{\alpha^2}{\hbar^2} \text{Tr}_B \left[\hat{H}(t), \int_0^t [\hat{H}(t'), \hat{\rho}(t')] dt' \right]$$

积掉环境自由度

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}_S(t) = -\frac{\alpha^2}{\hbar^2} \text{Tr}_B \left[\hat{H}(t), \int_0^t [\hat{H}(t'), \hat{\rho}(t')] dt' \right]$$

约化系统中的动力学演化

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}_S(t) = -\frac{\alpha^2}{\hbar^2} \int_0^t dt' \text{Tr}_B \left[\hat{H}(t), [\hat{H}(t'), \hat{\rho}(t')] \right]$$

- t 时刻系统的状态与 $0 \sim t$ 时刻的状态有关 \rightarrow 系统有记忆
- 热库相干时间非常短，关联函数可以认为是 0

$$\text{Tr}_B[\hat{H}(t)\hat{H}(t')\rho_B] \rightarrow \delta(t-s)$$

- 马尔可夫近似: $\rho(t') \rightarrow \rho(t)$
- 环境记忆非常短，可以把积分上限扩展到无穷

Born-Markov master equation

约化系统中的动力学演化

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}_S(t) = -\frac{\alpha^2}{\hbar^2} \int_0^\infty dt' \text{Tr}_B [\hat{H}(t), [\hat{H}(t'), \hat{\rho}(t)]]$$

- t 时刻系统的状态与 $0 \sim t$ 时刻的状态有关 \rightarrow 系统有记忆
- 热库相干时间非常短，关联函数可以认为是 0

$$\text{Tr}_B[\hat{H}(t)\hat{H}(t')\rho_B] \rightarrow \delta(t-s)$$

- 马尔可夫近似: $\rho(t')$ \rightarrow $\rho(t)$
- 环境记忆非常短，可以把积分上限扩展到无穷

Born-Markov master equation

约化系统中的动力学演化

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_S(t) = -\frac{\alpha^2}{\hbar^2} \int_0^\infty dt' \text{Tr}_B [\hat{H}(t), [\hat{H}(t'), \hat{\rho}_S(t)\hat{\rho}_B]]$$

- t 时刻系统的状态与 $0 \sim t$ 时刻的状态有关 \rightarrow 系统有记忆
- 热库相干时间非常短，关联函数可以认为是 0

$$\text{Tr}_B[\hat{H}(t)\hat{H}(t')\rho_B] \rightarrow \delta(t-s)$$

- 马尔可夫近似: $\rho(t') \rightarrow \rho(t)$
- 环境记忆非常短，可以把积分上限扩展到无穷

Born-Markov master equation

约化系统中的动力学演化

$$\hat{H}_{SB} = \hbar(\hat{S}^\dagger \hat{B} + \hat{B}^\dagger \hat{S})$$

- \hat{S} 是系统的一个算符
- \hat{B} 是环境的一个算符

$$\left[\hat{H}(t), [\hat{H}(t'), \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t)] \right] = \hbar \left[\hat{S}^\dagger \hat{B} + \hat{B}^\dagger \hat{S}, [\hat{H}(t'), \hat{\rho}_B \hat{\rho}(t)] \right]$$

总共有 16 项

约化系统中的动力学演化

$$\begin{aligned} [\hat{S}^\dagger \hat{B}, [\hat{H}(t'), \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t)]] &= \hbar [\hat{S}^\dagger \hat{B}(t), [\hat{S}^\dagger \hat{B}(t') + \hat{B}^\dagger(t') \hat{S}, \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t)]] \\ &= \hbar \hat{S}^\dagger \hat{B}(t) (\hat{S} \hat{B}^\dagger(t') + \hat{S}^\dagger \hat{B}(t')) \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t) \\ &\quad - \hbar \hat{S}^\dagger \hat{B}(t) \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t) (\hat{S} \hat{B}^\dagger(t') + \hat{S}^\dagger \hat{B}(t')) \\ &\quad - \hbar (\hat{S} \hat{B}^\dagger(t') + \hat{S}^\dagger \hat{B}(t')) \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger \hat{B}(t) \\ &\quad + \hbar \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t) (\hat{S} \hat{B}^\dagger(t') + \hat{S}^\dagger \hat{B}(t')) \hat{S}^\dagger \hat{B}(t) \end{aligned}$$

- 热库: $\langle \hat{B}^\dagger \hat{B} \rangle, \langle \hat{B} \hat{B}^\dagger \rangle, \langle \hat{B} \hat{B} \rangle, \langle \hat{B}^\dagger \hat{B}^\dagger \rangle$

$$\text{Tr}_B[\hat{B}(t) \hat{B}(t')] = \text{Tr}_B[\hat{B}^\dagger(t) \hat{B}^\dagger(t')] = 0$$

约化系统中的动力学演化

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_B \left[\hat{S}^\dagger \hat{B}, [\hat{H}(t'), \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t)] \right] &= \hbar \left(\hat{S}^\dagger \hat{S} \hat{\rho}_S(t) - \hat{S} \hat{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger \right) \mathrm{Tr}_B [\hat{B}(t) \hat{B}^\dagger(t') \hat{\rho}_B] \\ &\quad + \hbar \left(\hat{\rho}_S(t) \hat{S} \hat{S}^\dagger - \hat{S}^\dagger \hat{\rho}_S(t) \hat{S} \right) \mathrm{Tr}_B [\hat{B}^\dagger(t') \hat{B}(t) \hat{\rho}_B] \\ \mathrm{Tr}_B \left[\hat{B}^\dagger \hat{S}, [\hat{H}(t'), \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t)] \right] &= \hbar \left(\hat{S} \hat{S}^\dagger \hat{\rho}_S(t) - \hat{S}^\dagger \hat{\rho}_S(t) \hat{S} \right) \mathrm{Tr}_B [\hat{B}^\dagger(t) \hat{B}(t') \hat{\rho}_B] \\ &\quad + \hbar \left(\hat{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger \hat{S} - \hat{S} \hat{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger \right) \mathrm{Tr}_B [\hat{B}(t') \hat{B}^\dagger(t) \hat{\rho}_B]\end{aligned}$$

约化系统中的动力学演化

得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\rho}_S(t) = & - \left(\hat{S}^\dagger \hat{S}^\dagger \rho_S(t) - \hat{S}^\dagger \hat{\rho}_S(t) \hat{S} \right) G^*(t) - \left(\hat{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger \hat{S} - \hat{S} \hat{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger \right) F^*(t) \\ & - \left(\hat{S}^\dagger \hat{S} \hat{\rho}_S(t) - \hat{S} \hat{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger \right) F(t) - \left(\hat{\rho}_S(t) \hat{S} \hat{S}^\dagger - \hat{S}^\dagger \hat{\rho}_S(t) \hat{S} \right) G(t) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^t dt' \text{Tr}_B[\hat{B}(t) \hat{B}^\dagger(t') \hat{\rho}_B], & G(t) &= \int_0^t dt' \text{Tr}_B[\hat{B}^\dagger(t') \hat{B}(t) \hat{\rho}_B] \\ F^*(t) &= \int_0^t dt' \text{Tr}_B[\hat{B}(t') \hat{B}^\dagger(t) \hat{\rho}_B], & G^*(t) &= \int_0^t dt' \text{Tr}_B[\hat{B}^\dagger(t) \hat{B}(t') \hat{\rho}_B] \end{aligned}$$

约化系统中的动力学演化

对于一个真空模式

$$\hat{H}_B = \hbar \sum_k \omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$$

- \hat{a}_k 和 \hat{a}_k^\dagger 是不同模式的玻色湮灭算符和玻色产生算符
- \hat{B} 定义为

$$\hat{B} = \sum_k g_k^* \hat{a}_k$$

在相互作用表象下

$$\hat{B}(t) = \sum_k g_k^* \hat{a}_k e^{-i\omega_k t}$$

约化系统中的动力学演化

假设环境初态

$$\hat{\rho}_B(0) = (|0\rangle |0\rangle \dots) (\langle 0| \langle 0| \dots)$$

则

$$\text{Tr}_B[\hat{B}(t)\hat{B}^\dagger(t')\hat{\rho}_B] = \sum_{k,k'} g_k g_k^* e^{-i(\omega_k t - \omega_{k'} t')} \langle 0|\hat{a}_k \hat{a}_{k'}^\dagger|0\rangle$$

$$\text{Tr}_B[\hat{B}^\dagger(t')\hat{B}(t)\hat{\rho}_B] = \sum_{k,k'} g_k g_k^* e^{-i(\omega_k t - \omega_{k'} t')} \langle 0|\hat{a}_{k'}^\dagger \hat{a}_k|0\rangle$$

- 第二行为零
- 利用 $\hat{a}_k \hat{a}_{k'} = \delta_{k,k'} + \hat{a}_{k'}^\dagger \hat{a}_k$

约化系统中的动力学演化

得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_B[\hat{B}(t)\hat{B}^\dagger(t')\hat{\rho}_B] &= \sum_{k,k'} g_k g_k^* e^{-i(\omega_k t - \omega_{k'} t')} \delta_{k,k'} + \sum_{k,k'} g_k g_{k'} e^{-i(\omega_k t - \omega_{k'} t')} \langle 0 | \hat{a}_{k'}^\dagger \hat{a}_k | 0 \rangle \\ &= \sum_k |g_k|^2 e^{-i\omega_k(t-t')}\end{aligned}$$

因此

$$F(t) = \sum_k |g_k|^2 \int_0^t dt' e^{-i\omega_k(t-t')}, \quad G(t) = 0$$

约化系统中的动力学演化

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_k |g_k|^2 \int_0^t dt' e^{-i\omega_k(t-t')} \\ &= \int_0^\infty d\omega \left[\sum_k |g_k|^2 \delta(\omega - \omega_k) \right] \int_0^t dt' e^{-i\omega(t-t')} \\ &= \int_0^\infty d\omega J(\omega) \int_0^t d\tau e^{-i\omega\tau} \\ &= \pi \int_0^\infty d\omega J(\omega) \delta(\omega) - i\mathcal{P} \left(\int_0^\infty d\omega \frac{J(\omega)}{\omega} \right) \\ &\equiv \frac{\gamma + i\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

- $J(\omega) = \sum_k |g_k|^2 \delta(\omega - \omega_k)$ 为态密度

约化系统中的动力学演化

积分 $\int_0^\infty d\tau e^{-i\omega\tau}$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty d\tau e^{-i\omega\tau} &= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_0^\infty d\tau e^{-i\omega\tau - \eta\tau} \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\eta + i\omega} \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{\eta - i\omega}{\eta^2 + \omega^2} \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{\eta}{\eta^2 + \omega^2} - \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{i\omega}{\eta^2 + \omega^2} \\ &= \pi\delta(\omega) - i\mathcal{P}\left(\frac{1}{\omega}\right)\end{aligned}$$

- \mathcal{P} 为柯西主值 (principal value)

约化系统中的动力学演化

代回前面的刘维尔方程，得到

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_S(t) = - \left[\hat{\rho}_S(t)\hat{S}^\dagger\hat{S} - \hat{S}\hat{\rho}_S(t)\hat{S}^\dagger \right] \frac{\gamma - i\varepsilon}{2} - \left[\hat{S}^\dagger\hat{S}\hat{\rho}_S(t) - \hat{S}\hat{\rho}_S(t)\hat{S}^\dagger \right] \frac{\gamma + i\varepsilon}{2}$$

- 若 $\varepsilon = 0$ ，如 Lorentzian，可以把积分下限扩展到 $-\infty$
- 同时回到薛定谔表象

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_S = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}_S, \hat{\rho}_S] + \gamma \left[\hat{S}\hat{\rho}_S\hat{S}^\dagger - \frac{1}{2} \{ \hat{S}^\dagger\hat{S}, \hat{\rho}_S \} \right]$$

Lindblad 方程

约化系统中的动力学演化

谐振子热库 ($\beta_k = \hbar\omega_k/k_B T$)

$$\rho_B = \prod_k (1 - e^{-\beta_k}) e^{-\beta_k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k}$$

满足以下等式, 其中 $\bar{n}_k = 1/(\exp(\beta_k) - 1)$

$$\begin{aligned} \langle \hat{b}_k \rangle &= \langle \hat{b}_k^\dagger \rangle = 0, & \langle \hat{b}_k \hat{b}_{k'} \rangle &= \langle \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_{k'}^\dagger \rangle = 0 \\ \langle \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k \rangle &= \bar{n}_k \delta_{kk'}, & \langle \hat{b}_k \hat{b}_{k'}^\dagger \rangle &= (\bar{n}_k + 1) \delta_{kk'} \end{aligned}$$

约化系统中的动力学演化

$$\hat{B}(t) = \sum_j g_j \hat{b}_j e^{i\omega_j t}$$

把热平衡态代入 F 和 G 的表达式：

$$F(t) = \int_0^t dt' \text{Tr}_B[\hat{B}(t)\hat{B}^\dagger(t')\hat{\rho}_B]$$

$$G(t) = \int_0^t dt' \text{Tr}_B[\hat{B}^\dagger(t')\hat{B}(t)\hat{\rho}_B]$$

得到，

$$F(t) = \pi J(\omega)(\bar{n} + 1) - i\mathcal{P} \left(\int_0^\infty d\omega \frac{J(\omega)}{\omega} \right) (\bar{n} + 1)$$

$$G(t) = \pi J(\omega)\bar{n} - i\mathcal{P} \left(\int_0^\infty d\omega \frac{J(\omega)}{\omega} \right) \bar{n}$$

约化系统中的动力学演化

$$\dot{\rho}_S(t) = -i\Delta [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \rho_S(t)] + \frac{\gamma}{2} (\bar{n} + 1) \mathcal{D}(\hat{a})[\rho_S(t)] + \frac{\gamma}{2} \bar{n} \mathcal{D}(\hat{a}^\dagger)[\rho_S(t)]$$

其中

$$\mathcal{D}(\hat{a})[\rho] = 2\hat{a}\rho\hat{a}^\dagger - \{\rho, \hat{a}^\dagger\hat{a}\}, \quad \Delta = \int_0^\infty d\omega \frac{J(\omega)}{\omega}$$

- 一般来说, Δ 很小, 可以忽略
- $\mathcal{D}[\hat{a}]$ 可以认为是冷却过程
- $\mathcal{D}[\hat{a}^\dagger]$ 可以认为是加热过程 ← 零温时不存在

转换到薛定谔表象，有

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = -i\omega'[\hat{a}^\dagger\hat{a}, \rho_S(t)] + \frac{\gamma}{2}(\bar{n} + 1)\mathcal{D}(\hat{a})[\rho_S] + \frac{\gamma}{2}\bar{n}\mathcal{D}(\hat{a}^\dagger)[\rho_S]$$

- $\Delta' = \omega + \Delta$
- Δ 需要用到量子电动力学的方法

二能级系统

$$H_{SB} = \hat{\sigma}^- \sum_j g_j^* \hat{b}_j^\dagger + \sigma^+ \sum_j g_j \hat{b}_j$$

- $\sigma^- = |g\rangle\langle e|$, $\sigma^+ = |e\rangle\langle g|$
- 其对应主方程为

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -\frac{i}{\hbar}[H_{SB}, \rho(t)] + \frac{\gamma}{2}(\bar{n} + 1)\mathcal{D}(\sigma^-)[\rho] + \frac{\gamma}{2}\bar{n}\mathcal{D}(\sigma^+)[\rho]$$

考察第 n 个态的占据数 $p_n = \langle n|\rho|n\rangle$

约化系统中的动力学演化

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -\frac{i}{\hbar}[H_{SB}, \rho(t)] + \frac{\gamma}{2}(\bar{n} + 1)\mathcal{D}(\sigma^-)[\rho] + \frac{\gamma}{2}\bar{n}\mathcal{D}(\sigma^+)[\rho]$$

- 令 $\gamma_{\downarrow} = \gamma(\bar{n} + 1)$, $\gamma_{\uparrow} = \gamma\bar{n}$
- 令 $\omega' = 0$ 得到 p_n 的动力学方程

$$\begin{aligned}\dot{p}_n &= \gamma_{\downarrow}(n + 1)p_{n+1} - \gamma_{\downarrow}np_n + \gamma_{\uparrow}np_{n-1} - \gamma_{\uparrow}(n + 1)p_n \\ &= -[\gamma_{\downarrow}n + \gamma_{\uparrow}(n + 1)]p_n + \gamma_{\downarrow}(n + 1)p_{n+1} + \gamma_{\uparrow}np_{n-1}\end{aligned}$$

- 从态 $|n - 1\rangle$ 和 $|n + 1\rangle$ 跃迁到 n 态, 导致 p_n 增大
- 从态 $|n\rangle$ 跃迁到其它态, 导致 p_n 减小

$$P_{n \rightarrow n-1} = \gamma_{\downarrow}n, \quad P_{n \rightarrow n+1} = \gamma_{\uparrow}(n + 1)$$

约化系统中的动力学演化

系统达到平衡, 能级 $|n\rangle$ 和 $|n+1\rangle$ 之间的跃迁速率正好相等

$$p_n P_{n \rightarrow n+1} = p_{n+1} P_{n+1 \rightarrow n} \implies p_n \gamma_{\uparrow} = p_{n+1} \gamma_{\downarrow}$$

有

$$\frac{\gamma_{\downarrow}}{\gamma_{\uparrow}} = \frac{p_n}{p_{n+1}} = \exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) = 1 + \frac{1}{n}$$

约化系统中的动力学演化

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho(t)] + \sum_k \gamma_k \left(\hat{L}_k \rho \hat{L}_k^\dagger - \frac{1}{2} \left\{ \hat{L}_k^\dagger \hat{L}_k, \rho(t) \right\} \right)$$

第五章

约化系统中的动力学演化

共振荧光

暗态和电磁诱导透明效应 (EIT)
巨克尔效应

四波混频

总结

光场和原子系统的耦合会导致各种有趣的量子相干现象。

共振荧光是指原子在共振光场作用下的自发辐射现象

- 弱光驱动: 原子吸收一个光子, 辐射一个同频率的光子
- 强光驱动: 原子布居在基态和激发态之间剧烈振荡

考虑经典场和二能级耦合

$$\hat{V} = -\frac{1}{2}\hbar \left(\Omega_R \hat{\sigma}_+ e^{-i\omega t} + \Omega_R^* \hat{\sigma}_- e^{i\omega t} \right)$$

- Rabi 频率 $\Omega = \frac{\langle e|\hat{d}|g\rangle \cdot \mathcal{E}}{\hbar}$, \mathcal{E} 为光场振荡强度

$$E(t) = \mathcal{E} \cos(\omega t)$$

- 玻恩-马尔可夫近似

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \left[\hat{H}_0 + \hat{V}, \rho \right] + \frac{\Gamma}{2} (\bar{n} + 1) \mathcal{D}(\hat{\sigma}_-)[\rho] + \frac{\Gamma}{2} \bar{n} \mathcal{D}(\hat{\sigma}_+)[\rho]$$

如果频率很高, \bar{n} 非常小, $\mathcal{D}(\hat{\sigma}_+)$ 可以忽略

写出密度矩阵分量的运动方程：

$$\begin{aligned}\frac{d\rho_{ee}}{dt} &= -\Gamma\rho_{ee} - \frac{i}{2}\left(\Omega_R e^{-i\omega t}\rho_{eg} - c.c.\right) \\ \frac{d\rho_{eg}}{dt} &= -\left(i\omega_{eg} + \frac{\Gamma}{2}\right)\rho_{eg} + \frac{i}{2}\Omega_R(\rho_{ee} - \rho_{gg})e^{-i\omega t}\end{aligned}$$

求解微分方程：

$$\dot{\rho}_{eg}e^{(i\omega_{eg} + \Gamma/2)t} + (i\omega_{eg} + \frac{\Gamma}{2})\rho_{eg}e^{(i\omega_{eg} + \Gamma/2)t} = \frac{i}{2}\Omega_R(\rho_{ee} - \rho_{gg})e^{[i(\omega_{eg} - \omega) + \Gamma/2]t}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\rho_{eg}e^{(i\omega_{eg} + \Gamma/2)t}\right) = \frac{i}{2}\Omega_R(\rho_{ee} - \rho_{gg})e^{[i(\omega_{eg} - \omega) + \Gamma/2]t}$$

写出密度矩阵分量的运动方程：

$$\begin{aligned}\frac{d\rho_{ee}}{dt} &= -\Gamma\rho_{ee} - \frac{i}{2}\left(\Omega_R e^{-i\omega t}\rho_{eg} - c.c.\right) \\ \frac{d\rho_{eg}}{dt} &= -\left(i\omega_{eg} + \frac{\Gamma}{2}\right)\rho_{eg} + \frac{i}{2}\Omega_R(\rho_{ee} - \rho_{gg})e^{-i\omega t}\end{aligned}$$

求解微分方程：

- 假设初态 $\rho_{eg}(0) = 0$

$$e^{i\omega t}\rho_{eg}(t) = \frac{i}{2}\Omega_R \int dt' e^{-[i(\omega_{eg}-\omega)+\frac{\Gamma}{2}](t-t')} [\rho_{ee}(t') - \rho_{gg}(t')]$$

在弱光下，原子布居变化很小，在时间尺度 $t \sim 1/\Gamma$ 下，可以认为不变

$$\rho_{eg}(t) = \frac{i}{2}\Omega_R \frac{e^{-i\omega t} - e^{-(i\omega_{eg} + \Gamma/2)t}}{i(\omega_{eg} - \omega) + \Gamma/2} [\rho_{ee}(0) - \rho_{gg}(0)]$$

长时极限下

$$\rho_{eg}(t) = \frac{i}{2}\Omega_R \frac{e^{-i\omega t}}{i(\omega_{eg} - \omega) + \Gamma/2} [\rho_{ee}(0) - \rho_{gg}(0)]$$

- 弱光下，原子电偶极矩振荡频率与入射光相同
- 有别于自发辐射：辐射光子的中心频率为原子上下能级差，谱线宽度正比于能级寿命
- 弱光下：入射光场谱线宽度一般远小于上能级展宽，所以原子辐射谱线宽度由入射光场决定

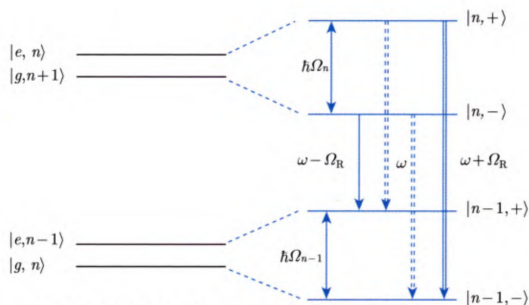
强场耦合：当 Ω 大于谱线宽度 Γ

- 共振时，缀饰态

$$|n, \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e, n\rangle \pm |g, n+1\rangle)$$

- 本征值为 $\hbar\Omega_n/2, -\hbar\Omega_n/2$ ，其中 $\Omega_n = 2g\sqrt{n+1}$
动态斯塔克分裂 (dynamic Stark splitting)
- 不同激发数下，形成一系列缀饰态

共振荧光



- 光场和原子耦合在一起，形成缀饰态
- 出现三种不同的频率： ω_{eg} , $\omega_{eg} + \Omega_R$, $\omega_{eg} - \Omega_R$
- 主峰 ω_{eg} 信号最强，频谱宽度为 $\Gamma/2$
- 边带频谱宽度 $3\Gamma/4$

共振荧光

当共振时，相互作用表象下

$$\hat{V}_I = \frac{1}{2} \hbar \Omega_R (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)$$

- 缀饰态

$$\hat{V}_I |\pm\rangle = \pm \frac{\hbar \Omega_R}{2} |\pm\rangle$$

- 在缀饰态基矢下

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{V}_I, \rho] - \frac{\Gamma}{2} (\hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- \rho + \rho \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- - 2\hat{\sigma}_- \rho \hat{\sigma}_+)$$

- 动力学方程

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{++} &= -\frac{\Gamma}{2} \rho_{++} + \frac{\Gamma}{4} \\ \dot{\rho}_{+-} &= -\left(\frac{3\Gamma}{4} + i\Omega_R\right) \rho_{+-} - \frac{\Gamma}{4} \rho_{-+} - \frac{\Gamma}{2}\end{aligned}$$

共振荧光

- 上能级 ρ_{++} 的耗散率为 $\Gamma/2$
- 非对角矩阵元 ρ_{+-} 和 ρ_{-+} 耗散率为 $3\Gamma/4$
- ρ_{ee} 的耗散率为 Γ
- ρ_{eg} 的耗散率为 $\Gamma/2$
- 共振荧光可以看作时缀饰能级所对应的自发辐射光谱

光场在介质中的传播及极化

- 光场和原子共振 \rightarrow 光场被介质吸收, 或者发生色散、散射等
- 原子中, 电子处在能量本征态, 平均电偶极矩为零
- 激光 \rightarrow 原子偏离平衡位置 \rightarrow 极化

电偶极矩

$$\hat{\mathbf{d}} = -e\mathbf{r}$$

电极化强度由电偶极矩算符的平均表示

$$\mathbf{P} = \langle \hat{\mathbf{d}} \rangle = \text{Tr}(-e\mathbf{r}\rho)$$

光场在介质中的传播及极化

麦克斯韦方程组

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, & \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{H}\end{aligned}$$

得到电场传播方程

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mu_0 \mathbf{H}) \\ \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} &= -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}\end{aligned}$$

光场在介质中的传播及极化

电场

$$\mathbf{E}(z, t) = \frac{1}{2}\epsilon e^{-i(\omega t - kz)} \hat{\mathbf{e}} + c.c.$$

利用线性响应，电极化强度

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(z, t) &= \epsilon_0 \int_0^\infty d\tau \chi(\tau) \mathbf{E}(z, t - \tau) \\ &= \frac{\epsilon_0}{2}\epsilon \left[\chi(\omega) e^{-i(\omega t - kz)} + \chi(-\omega) e^{i(\omega t - kz)} \right] \end{aligned}$$

↓

代入电场传播方程

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}$$

↓

$$-k^2 - \frac{1}{c^2}(-\omega^2) = \mu_0 \epsilon_0 (-\omega^2) \chi(\omega)$$

光场在介质中的传播及极化

电场

$$\mathbf{E}(z, t) = \frac{1}{2}\epsilon e^{-i(\omega t - kz)} \hat{\mathbf{e}} + c.c.$$

利用线性响应, 电极化强度

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(z, t) &= \epsilon_0 \int_0^\infty d\tau \chi(\tau) \mathbf{E}(z, t - \tau) \\ &= \frac{\epsilon_0}{2}\epsilon \left[\chi(\omega) e^{-i(\omega t - kz)} + \chi(-\omega) e^{i(\omega t - kz)} \right] \end{aligned}$$

↓

代入电场传播方程

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}$$

↓

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} [1 + \chi(\omega)]$$

光场在介质中的传播及极化

由色散关系 $k = \frac{\omega}{c}n$, 得到

$$n^2(\omega) = 1 + \chi(\omega)$$

- $\chi(\omega)$ 一般是复数

$$n = n_R + in_I = (1 + \chi_R + i\chi_I)^{1/2}$$

- χ 可以通过系统极化得到 $\mathbf{P} = \langle \mathbf{d} \rangle$

光场在介质中的传播及极化

定义 $\theta = \arctan\left(\frac{\chi_I}{1+\chi_R}\right)$:

$$\begin{aligned}n_R + in_I &= (1 + \chi_R + i\chi_I)^{1/2} \\ &= [(1 + \chi_R)^2 + \chi_I^2]^{1/4} e^{i \operatorname{sgn}(\chi_I)\theta/2}\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}n_R &= [(1 + \chi_R)^2 + \chi_I^2]^{1/4} \cos(\theta/2), \\ n_I &= [(1 + \chi_R)^2 + \chi_I^2]^{1/4} \sin(\operatorname{sgn}(\chi_I)\theta/2)\end{aligned}$$

- 介质的色散性质由 n_R 决定
- n_I 反映介质对光场的吸收
 $n_I > 0$: 吸收; $n_I < 0$: 增强
- 当 $\chi_R \gg |\chi_I|$ 时 \rightarrow 折射率极大, 吸收率极小

光场在介质中的传播及极化

定义 $\theta = \arctan\left(\frac{\chi_I}{1+\chi_R}\right)$:

$$\begin{aligned}n_R + in_I &= (1 + \chi_R + i\chi_I)^{1/2} \\ &= [(1 + \chi_R)^2 + \chi_I^2]^{1/4} e^{i \operatorname{sgn}(\chi_I)\theta/2}\end{aligned}$$

因此 $(|\chi| = \sqrt{(1 + \chi_R)^2 + \chi_I^2})$

$$\begin{aligned}n_R &= \sqrt{\frac{|\chi| + 1 + \chi_R}{2}} \\ n_I &= \sqrt{\frac{|\chi| - 1 - \chi_R}{2}} \operatorname{sgn}(\chi_I)\end{aligned}$$

- 介质的色散性质由 n_R 决定
- n_I 反映介质对光场的吸收
 $n_I > 0$: 吸收; $n_I < 0$: 增强
- 当 $\chi_R \gg |\chi_I|$ 时 \rightarrow 折射率极大, 吸收率极小

光场在介质中的传播及极化

二能级系统

$$\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{d}_{ge} |g\rangle\langle e| + \mathbf{d}_{ge}^* |e\rangle\langle g|$$

电极化

$$\mathbf{P} = \langle \hat{\mathbf{d}} \rangle = \mathbf{d}_{ge} \rho_{eg} + \mathbf{d}_{ge}^* \rho_{ge}$$

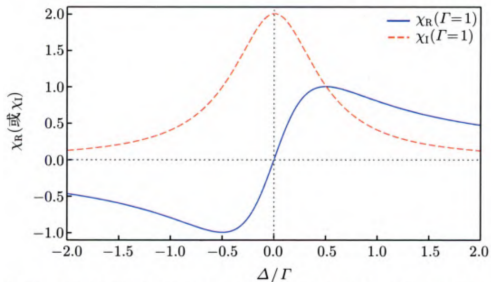
把 ρ_{ge} 和 ρ_{eg} 代入 (N_a 为原子数目)

$$\chi_R = -\frac{d_{ge}^2 N_a}{\epsilon_0 \hbar} \frac{\omega_{eg} - \omega}{(\omega_{eg} - \omega)^2 + \Gamma^2/4} [\rho_{ee}(0) - \rho_{gg}(0)]$$

$$\chi_I = -\frac{d_{ge}^2 N_a}{\epsilon_0 \hbar} \frac{\Gamma/2}{(\omega_{eg} - \omega)^2 + \Gamma^2/4} [\rho_{ee}(0) - \rho_{gg}(0)]$$

- 当 $\omega_{eg} = \omega$, χ_I 最大

光场在介质中的传播及极化



- 当 $\omega_{eg} = \omega$, χ_I 最大 \rightarrow 吸收最大
- 当 $\omega_{eg} = \omega$, χ_R 为零
- 初态 $\rho_{gg}(0) = 1$ 时, 若 $\omega_{eg} - \omega = \Gamma/2$

$$\chi_R = \chi_I = \frac{3\pi c^3}{\omega^3} N_a$$

光场在介质中的传播及极化

群速度

$$k = \frac{1}{c}\omega n(\omega) \rightarrow dk = \frac{1}{c} \left[n(\omega) + \omega \frac{\partial n(\omega)}{\partial \omega} \right] d\omega$$
$$\rightarrow v_g = \frac{c}{n + \omega \frac{\partial n}{\partial \omega}}$$

- 为什么要大折射率（强色散）：当介质的折射率随频率急剧变化时，群折射率 n 会变得非常大。这可以将光速压低到每秒几米、甚至将其“冻结”停下。
- 为什么要少吸收：如果光子在被减速或储存的过程中被介质大量吸收，量子态的相干性就遭到破坏，信号丢失。低吸收是保持量子信息高保真度 (Fidelity) 的前提。

光场在介质中的传播及极化

但是??

- 波长 $\lambda = 1 \mu\text{m}$
- 原子数目 $N_a \sim 10^{16} \text{ atoms/cm}^3$

$$\chi_R \sim 10^4, \quad \chi_I \sim 10^4$$

↑

很强的吸收率

第五章

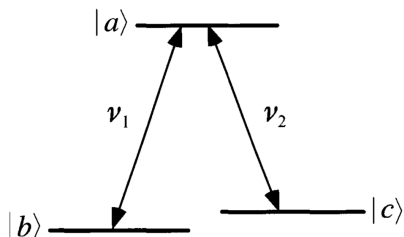
约化系统中的动力学演化

共振荧光

暗态和电磁诱导透明效应 (EIT)
巨克尔效应

四波混频

总结



Λ -型能级结构

$$H = H_0 + H_1$$

其中

$$H_0 = \hbar\omega_a |a\rangle\langle a| + \hbar\omega_b |b\rangle\langle b| + \hbar\omega_c |c\rangle\langle c|$$

$$H_1 = -\frac{\hbar}{2} \left(\Omega_{R1} e^{-i\nu_1 t - i\phi_1} |a\rangle\langle b| + \Omega_{R2} e^{-i\nu_2 t - i\phi_2} |a\rangle\langle c| \right) + \text{H. c.}$$

波函数

$$|\psi(t)\rangle = c_a(t)e^{-i\omega_a t} |a\rangle + c_b(t)e^{-i\omega_b t} |b\rangle + c_c(t)e^{-i\omega_c t} |c\rangle$$

代入薛定谔方程，得到

$$\dot{c}_a = \frac{i}{2} \left(\Omega_{R1} e^{-i\phi_1} c_b + \Omega_{R2} e^{-i\phi_2} c_c \right),$$

$$\dot{c}_b = \frac{i}{2} \Omega_{R1} e^{i\phi_1} c_a,$$

$$\dot{c}_c = \frac{i}{2} \Omega_{R2} e^{i\phi_2} c_a$$

- 假定 $\omega_{ab} = \nu_1$, $\omega_{ac} = \nu_2$

初态

$$|\psi(0)\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |b\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\Psi} |c\rangle$$

解微分方程, 得到 ($\Omega = \sqrt{\Omega_{R1}^2 + \Omega_{R2}^2}$):

$$c_a(t) = \frac{i}{\Omega} \sin \frac{\Omega t}{2} \left(\Omega_{R1} e^{-i\phi_1} \cos \frac{\theta}{2} + \Omega_{R2} e^{-i(\phi_2 + \Psi)} \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

$$c_b(t) = \frac{1}{\Omega^2} \left[\left(\Omega_{R2}^2 + \Omega_{R1}^2 \cos \frac{\Omega t}{2} \right) \cos \frac{\theta}{2} - 2\Omega_{R1}\Omega_{R2} e^{i(\phi_1 - \phi_2 - \Psi)} \sin^2 \frac{\Omega t}{4} \sin \frac{\theta}{2} \right]$$

$$c_c(t) = \frac{1}{\Omega^2} \left[-2\Omega_{R1}\Omega_{R2} e^{-i(\phi_1 - \phi_2)} \sin^2 \frac{\Omega t}{4} \cos \frac{\theta}{2} + \left(\Omega_{R1}^2 + \Omega_{R2}^2 \cos \frac{\Omega t}{2} \right) e^{-i\Psi} \sin \frac{\theta}{2} \right]$$

当满足如下条件时

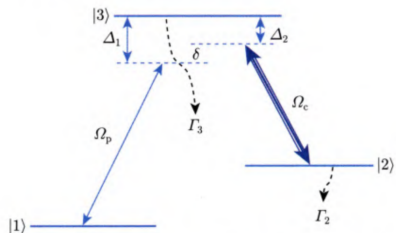
$$\Omega_{R1} = \Omega_{R2}, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \phi_1 - \phi_2 - \Psi = \pm\pi$$

激发态的布居始终为零，三个系数不随时间变化

$$c_a(t) = 0, \quad c_b(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad c_c(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\Psi}$$

Coherent trapping

暗态



$$H = \hbar\omega_1 |1\rangle\langle 1| + \hbar\omega_2 |2\rangle\langle 2| + \hbar\omega_3 |3\rangle\langle 3| + H_I$$

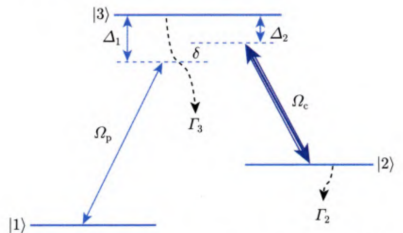
耦合作用

$$H_I = -\frac{\hbar}{2} \left(\Omega_p \hat{\sigma}_{31} e^{-i\omega_p t} + \Omega_c \hat{\sigma}_{32} e^{-i\omega_c t} + \text{H. c.} \right)$$

- 选择相互作用表象分析问题，如何找 \hat{H}_0 ?

Rotating frame

暗态



$$H = \hbar\omega_1 |1\rangle\langle 1| + \hbar\omega_2 |2\rangle\langle 2| + \hbar\omega_3 |3\rangle\langle 3| + H_I$$

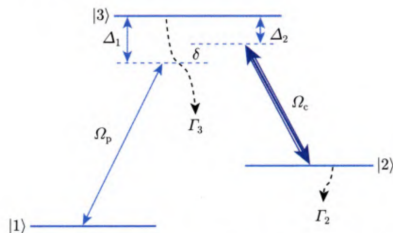
耦合作用

$$H_I = -\frac{\hbar}{2} \left(\Omega_p \hat{\sigma}_{31} e^{-i\omega_p t} + \Omega_c \hat{\sigma}_{32} e^{-i\omega_c t} + \text{H. c.} \right)$$

- 选择相互作用表象分析问题，如何找 \hat{H}_0 ?

$$H_0 = \hbar\omega_1 |1\rangle\langle 1| + \hbar(\omega_1 + \omega_p) |3\rangle\langle 3| + \hbar(\omega_1 + \omega_p - \omega_c) |2\rangle\langle 2|$$

暗态



$$H = \hbar\omega_1 |1\rangle\langle 1| + \hbar\omega_2 |2\rangle\langle 2| + \hbar\omega_3 |3\rangle\langle 3| + H_I$$

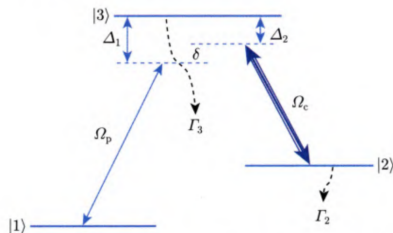
耦合作用

$$H_I = -\frac{\hbar}{2} \left(\Omega_p \hat{\sigma}_{31} e^{-i\omega_p t} + \Omega_c \hat{\sigma}_{32} e^{-i\omega_c t} + \text{H. c.} \right)$$

- 选择相互作用表象分析问题，如何找 \hat{H}_0 ?

$$H_{\text{int}} = \hbar(\omega_3 - \omega_1 - \omega_p) |3\rangle\langle 3| + \hbar(\omega_2 - \omega_1 - \omega_p + \omega_c) |2\rangle\langle 2| \\ - \frac{\hbar}{2} (\Omega_p \hat{\sigma}_{31} + \Omega_c \hat{\sigma}_{32} + \text{H. c.})$$

暗态



$$H = \hbar\omega_1 |1\rangle\langle 1| + \hbar\omega_2 |2\rangle\langle 2| + \hbar\omega_3 |3\rangle\langle 3| + H_I$$

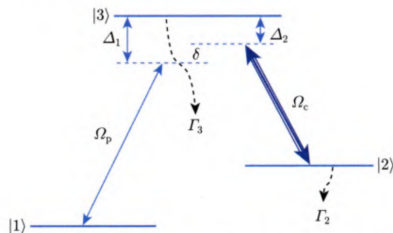
耦合作用

$$H_I = -\frac{\hbar}{2} \left(\Omega_p \hat{\sigma}_{31} e^{-i\omega_p t} + \Omega_c \hat{\sigma}_{32} e^{-i\omega_c t} + \text{H. c.} \right)$$

- 选择相互作用表象分析问题，如何找 \hat{H}_0 ?

$$H_{\text{int}} = \hbar\Delta_1 |3\rangle\langle 3| + \hbar(\Delta_1 - \Delta_2) |2\rangle\langle 2| - \frac{\hbar}{2} (\Omega_p \hat{\sigma}_{31} + \Omega_c \hat{\sigma}_{32} + \text{H. c.})$$

暗态



- $\delta = \Delta_1 - \Delta_2$ 也叫双光子失谐量

$$H_{\text{int}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Omega_p \\ 0 & \Delta_1 - \Delta_2 & \Omega_c \\ \Omega_p & \Omega_c & \Delta_1 \end{pmatrix}$$

- 当双光子共振 $\delta = 0$ 时，本征值

$$E^\pm = \frac{\hbar}{2} \left(\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + \Omega_p^2 + \Omega_c^2} \right), \quad E^0 = 0$$

- 本征态 ($\tan \phi = \Omega_p / \Omega_c$, $\tan(2\theta) = \sqrt{\Omega_p^2 + \Omega_c^2} / \Delta$)

$$|\psi^\pm\rangle = \sin \theta (\sin \phi |1\rangle + \cos \phi |2\rangle) \pm \cos \theta |3\rangle$$

$$|\psi^0\rangle = \cos \phi |1\rangle - \sin \phi |2\rangle$$

在量子光学中，暗态 (Dark State) 是一个极为核心的相干概念。简单来说，暗态是指一个多能级量子系统在特定相干光场的照射下，由于量子干涉效应而形成的一种完全不与光场发生耦合的特殊叠加态。

- 因为系统一旦进入这个状态就会停止自发辐射，“变暗”消失在探测器的视野里，所以被称为“暗态”。

$$\langle e|H_I|D\rangle = 0$$

$|e\rangle$ 和 $|D\rangle$ 分别对应激发态和暗态

$$|\psi^0\rangle \sim \Omega_c |1\rangle - \Omega_p |2\rangle$$

- $|\psi^0\rangle$ 不包含激发态组分，且能量为零

$$H_{\text{int}} |\psi^0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Omega_p \\ 0 & 0 & \Omega_c \\ \Omega_p & \Omega_c & \Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_c \\ -\Omega_p \\ 0 \end{pmatrix} = \Omega_p \Omega_c - \Omega_c \Omega_p = 0$$

- 寿命长：不受激发态退相干影响，暗态可以保持长时间相干性
- 干涉相消 (destructive interference)

$$\langle 3 | H_{\text{int}} | \psi^0 \rangle \propto \Omega_p \Omega_c - \Omega_c \Omega_p = 0$$

两条耦合路径相位相差 π

亮态 (Bright state)

两个激发态本征态相互叠加

$$\begin{aligned} |B\rangle &= \sin\theta |\psi^+\rangle + \cos\theta |\psi^-\rangle = \sin\phi |1\rangle + \cos\phi |2\rangle \\ &\propto \Omega_p |1\rangle + \Omega_c |2\rangle \end{aligned}$$



两条耦合路径相位相同



干涉增强



处在亮态的原子会疯狂吸收光子向上跃迁

相干布居陷落 (Coherent population trapping, CPT) 机制

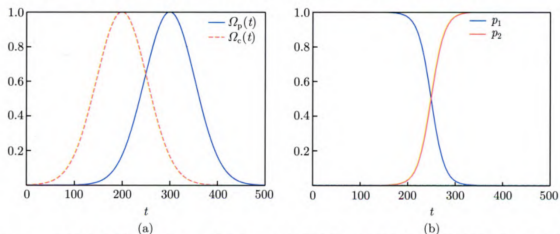
- 初始, 原子可能处在 $|1\rangle$, $|2\rangle$ (或者 $|B\rangle$, $|D\rangle$)
- 原子吸收光子, 激发到上能级 $|3\rangle$
- 跃迁到 $|3\rangle$ 的原子极不稳定, 会自发辐射回到 $|1\rangle$ 或者 $|2\rangle$
- 类似一个单向阀: 跌落到亮态的原子会再次被激发, 一旦跌落到暗态 $|D\rangle$, 就再也出不来

$$|D\rangle = \cos\phi |1\rangle - \sin\phi |2\rangle, \quad \tan\phi = \Omega_p/\Omega_c$$

- 当 $\phi = 0$ 时, $|D\rangle = |1\rangle$
- 当 $\phi = \pi/2$ 时, $|D\rangle = -|2\rangle$
- 初始状态, $M(0) = \Omega_p(0)/\Omega_c(0) \rightarrow 0$
- 缓慢增加 $M(t)$, 末态时 $M(\infty) = \Omega_p(\infty)/\Omega_c(\infty) \rightarrow \infty$
- 系统将绝热地从能级 $|1\rangle$ 转移到能级 $|2\rangle$

Stimulated Raman adiabatic passage(STIRAP)

受激拉曼布居转移



- STIRAP 不受激发态退相干影响 → 转移中保持相干性
- 转换效率高 → 理想状态下可以达到 100%

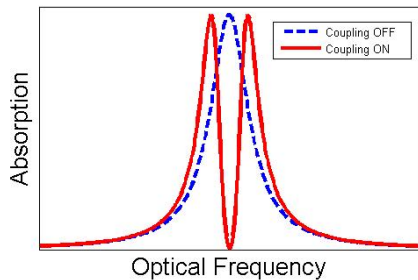
暗态的应用

- 量子信息存储：在光子与原子的相干接口中，利用暗态可以将光子的量子态（相位和振幅）无损地转化为原子基态的集体相干相，实现量子内存。
- 受激拉曼布居转移：通过时间上调控控制光和探针光的先后顺序，可以把暗态从纯 $|1\rangle$ 态平滑地演化到纯 $|2\rangle$ 态，从而实现高效、无损耗的量子态高保真度传输。

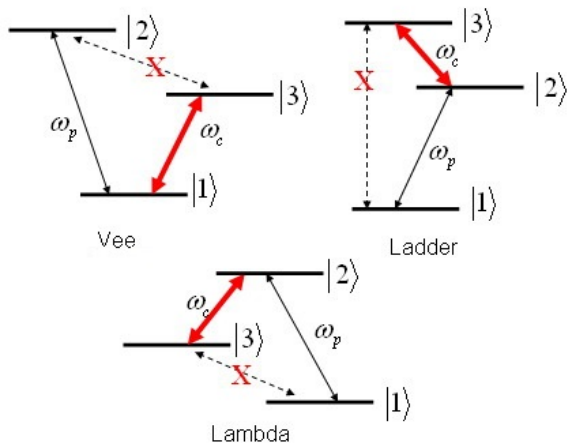
Quantum state transfer

- 原子钟 (coherent population trapping 原子钟)：利用 CPT 产生的极窄相干共振暗线，可以制造出芯片级的微型原子钟，用于高精度导航。

Electromagnetically induced transparency (EIT)

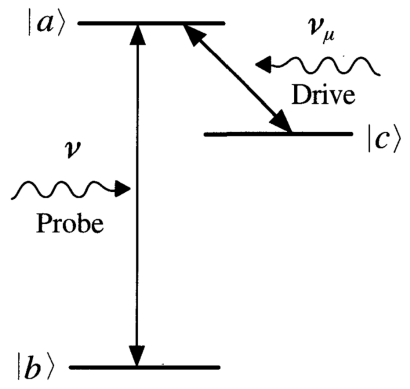


电磁诱导透明



From wikipedia

电磁诱导透明

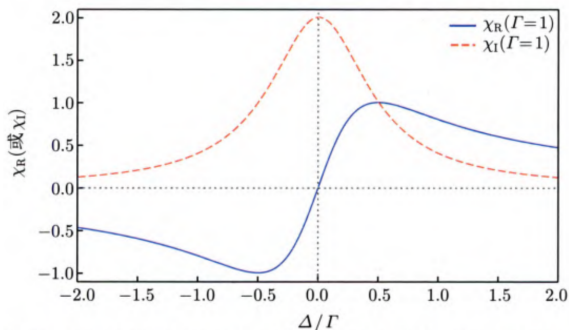


- $|a\rangle$ 和 $|c\rangle$ 由一束强相干光耦合
- $|a\rangle$ 和 $|b\rangle$ 由探测光耦合，我们关心它的吸收和色散

电磁诱导透明

- 如果没有驱动光 ν_μ , 能级 $|c\rangle$ 不参与耦合, 探测光被吸收

$$\chi \propto \frac{N}{V} \frac{1}{\epsilon_0 \hbar} \frac{1}{2\Delta - i\Gamma}$$



电磁诱导透明

- 涉及原子激发和跃迁
- 原子大多停留在基态，激发态布居很少

→ Lindblad 方程

→ 带有非厄米耗散项的哈密顿量

考虑双光子共振情况

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{ab} &= -(i\omega_{ab} + \gamma_1)\rho_{ab} - \frac{i}{2} \frac{\wp_{ab}\mathcal{E}}{\hbar} e^{-i\nu t} (\rho_{aa} - \rho_{bb}) + \frac{i}{2} \Omega_{\mu} e^{-i\phi_{\mu} - i\nu_{\mu} t} \rho_{cb} \\ \dot{\rho}_{cb} &= -(i\omega_{cb} + \gamma_3)\rho_{cb} - \frac{i}{2} \frac{\wp_{ab}\mathcal{E}}{\hbar} e^{-i\nu t} \rho_{ca} + \frac{i}{2} \Omega_{\mu} e^{i\phi_{\mu} + i\nu_{\mu} t} \rho_{ab} \\ \dot{\rho}_{ac} &= -(i\omega_{ac} + \gamma_2)\rho_{ac} - \frac{i}{2} \Omega_{\mu} e^{-i\phi_{\mu} - i\nu_{\mu} t} (\rho_{aa} - \rho_{cc}) + \frac{i}{2} \frac{\wp_{ab}\mathcal{E}}{\hbar} e^{-i\nu t} \rho_{bc}\end{aligned}$$

变换到相互作用表象 (rotating frame)

$$\rho_{ab} \rightarrow \rho_{ab} e^{-i\nu t}, \quad \rho_{cb} \rightarrow \rho_{cb} e^{-i(\nu + \omega_{ca})t}$$

电磁诱导透明

并假定初态 $\rho_{bb}(0) = 1, \rho_{aa}(0) = \rho_{cc} = \rho_{ca} = 0$:

$$\dot{\rho}_{ab} = -(\gamma_1 + i\Delta)\rho_{ab} + \frac{i}{2} \frac{\rho_{ab}\mathcal{E}}{\hbar} + \frac{i}{2}\Omega_\mu e^{-i\phi_\mu} \rho_{cb}$$

$$\dot{\rho}_{cb} = -(\gamma_3 + i\Delta)\rho_{cb} + \frac{i}{2}\Omega_\mu e^{i\phi_\mu} \rho_{ab}$$

其中 $\Delta = \omega_{ab} - \nu$

电磁诱导透明

并假定初态 $\rho_{bb}(0) = 1, \rho_{aa}(0) = \rho_{cc} = \rho_{ca} = 0$:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \rho_{ab} \\ \rho_{cb} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \gamma_1 + i\Delta & -\frac{i}{2}\Omega_\mu e^{-i\phi_\mu} \\ -\frac{i}{2}\Omega_\mu e^{i\phi_\mu} & \gamma_3 + i\Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{ab} \\ \rho_{cb} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i\rho_{ab}\mathcal{E}/(2\hbar) \\ 0 \end{pmatrix}$$

其中 $\Delta = \omega_{ab} - \nu$

$$\dot{R} = -MR + A$$

解为

$$R(t) = \int_{-\infty}^t e^{-M(t-t')} A dt'$$

得到

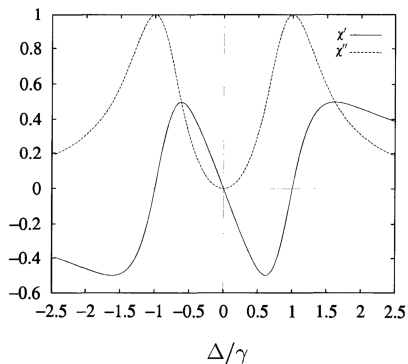
$$\rho_{ab}(t) = \frac{i}{2\hbar} \frac{\wp_{ab} \mathcal{E} e^{-i\nu t} (\gamma_3 + i\Delta)}{(\gamma_1 + i\Delta)(\gamma_3 + i\Delta) + \Omega_\mu^2/4}$$

对应极化 $P = \epsilon_0 \chi \mathcal{E}$ ，得到响应系数的实部和虚部：

$$\chi' = \frac{N_a |\wp_{ab}^2| \Delta}{\epsilon_0 \hbar Z} [\gamma_3(\gamma_1 + \gamma_3) + (\Delta^2 - \gamma_1\gamma_3 - \Omega_\mu^2/4)]$$
$$\chi'' = \frac{N_a |\wp_{ab}^2|}{\epsilon_0 \hbar Z} [\Delta^2(\gamma_1 + \gamma_3) - \gamma_3(\Delta^2 - \gamma_1\gamma_3 - \Omega_\mu^2/4)]$$

其中 $Z = (\Delta^2 - \gamma_1\gamma_3 - \Omega_\mu^2/4)^2 + \Delta^2(\gamma_1 + \gamma_3)^2$

电磁诱导透明



- 当 $\Delta = 0$: $\chi' = 0$, $\chi'' \propto \gamma^3$

电磁诱导透明

First experimental observation

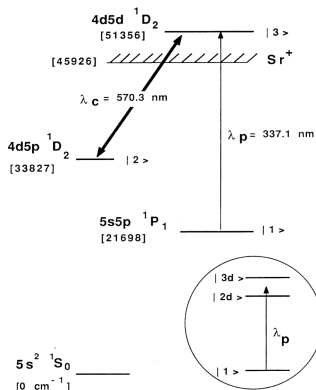


FIG. 1. Energy-level diagram of neutral Sr. Inset: Dressed-state picture.

K. J. Boller et al, PRL 66, 2593 (1991)

- 锶原子序数 38，碱土金属，外层两个电子
- $|3\rangle$ 的寿命为 4.4 ps

电磁诱导透明

First experimental observation

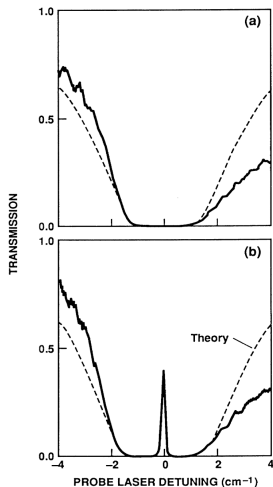
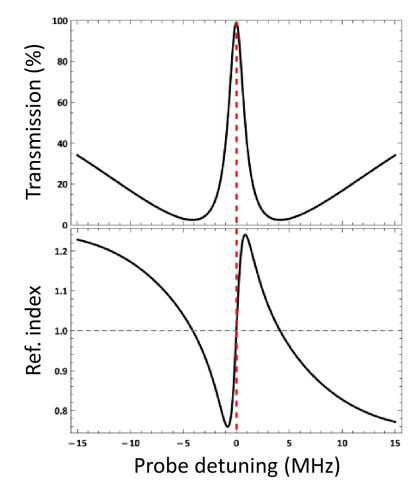


FIG. 3. Transmission vs probe laser detuning for (a) $\Omega_{23}=0$ and (b) $\Omega_{23}=1.5 \text{ cm}^{-1}$, $\Delta\omega_r = -0.1 \text{ cm}^{-1}$. Minimum transmission is $\exp(-20)$.

电磁诱导透明

群速度

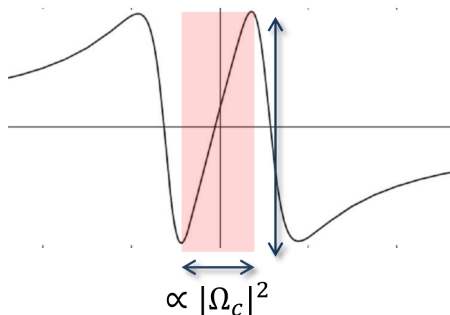


$$k = \frac{n(\omega)\omega}{c}, \quad v_g = \left(\frac{dk}{d\omega} \right)^{-1} = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}}$$

电磁诱导透明

群速度

$$k = \frac{n(\omega)\omega}{c}, \quad v_g = \left(\frac{dk}{d\omega} \right)^{-1} = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}}$$



$$v_g \propto \frac{|\Omega_c|^2}{N}$$

电磁诱导透明

- EIT 的过程可以用暗态解释
- 双光子共振
- 由于驱动光非常强，探测光进入系统后很快把原子激发到暗态

$$|D\rangle \propto \Omega_p |b\rangle - \Omega_c |c\rangle$$

$\Omega_p \gg \Omega_c$ ，原子初态制备在 $|b\rangle$ 态，因此可以很快进入暗态

- 暗态与外界没有交互 \rightarrow 阻止原子吸收光场

巨克尔效应

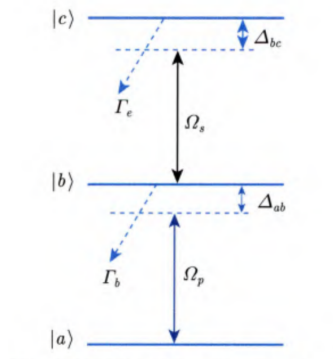
- 克尔效应，也称二次电光效应
- 1878 John Kerr, Scottish physicist
- 折射率 $\Delta n = \lambda K E^2$, λ 为波长
- 极化

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi^{(1)} \mathbf{E} + \epsilon_0 \chi^{(2)} \mathbf{E} \mathbf{E} + \epsilon_0 \chi^{(3)} \mathbf{E} \mathbf{E} \mathbf{E}$$

- 非线性效应 \rightarrow 制备量子态
- 高压传感器、全光开关、.....

巨克尔效应

利用光与物质相互作用实现光场和光场的耦合



$$\hat{H}/\hbar = \left(\Delta_{ab} - \frac{i}{2}\Gamma_b \right) \hat{\sigma}_{bb} + \left(\Delta_{bc} - \frac{i}{2}\Gamma_c \right) \hat{\sigma}_{cc} \\ - \frac{1}{2} (\Omega_p \hat{\sigma}_{ba} + \Omega_s \hat{\sigma}_{cb} + \text{H. c.})$$

巨克尔效应

- 量子跃迁概率比较小
- 原子大多停留在基态，激发态布居很少
 - 带有非厄米耗散项的哈密顿量

巨克尔效应

设波函数为

$$|\psi\rangle = c_a |a\rangle + c_b |b\rangle + c_c |c\rangle$$

薛定谔方程 ($\bar{\Delta}_{ab} = \Delta_{ab} - i\Gamma_b/2$, $\bar{\Delta}_{bc} = \Delta_{bc} - i\Gamma_c/2$)

$$i\dot{c}_a = -\frac{1}{2}\Omega_p^* c_b$$

$$i\dot{c}_b = -\frac{1}{2}\Omega_p c_a + \bar{\Delta}_{ab} c_b - \frac{1}{2}\Omega_s^* c_c$$

$$i\dot{c}_c = -\frac{1}{2}\Omega_s c_b + \bar{\Delta}_{bc} c_c$$

- 设初态 $c_a = 1$
- 当 $\Delta_{ab} \gg \Omega_p$, 可以认为 $c_a \approx 1$

巨克尔效应

得到

$$c_b = \frac{2\bar{\Delta}_{bc}}{4\bar{\Delta}_{ab}\bar{\Delta}_{bc} - |\Omega_s|^2} = \frac{2\bar{\Delta}_{bc}(4\bar{\Delta}_{ab}^*\bar{\Delta}_{bc}^* - |\Omega_s|^2)}{|4\bar{\Delta}_{ab}\bar{\Delta}_{bc} - |\Omega_s|^2|^2} \Omega_p$$

- 包含 $\Omega_s \Omega_s^* \Omega_p$
- $\rho_{ab} = c_b c_a^* \approx c_b$, 根据极化率的定义

$$\chi^{(3)} = \frac{N}{V} \frac{|\mu_{ab}|^2 |\mu_{bc}|^2}{\epsilon_0 \hbar^3} \frac{-4\bar{\Delta}_{bc}}{|4\bar{\Delta}_{ab}\bar{\Delta}_{bc} - |\Omega_s|^2|^2}$$

- 当 $(|\bar{\Delta}_{ab}|, |\bar{\Delta}_{bc}|) \gg |\Omega_s|$,

$$\chi^{(3)} \approx -\frac{N}{V} \frac{|\mu_{ab}|^2 |\mu_{bc}|^2}{\epsilon_0 \hbar^3} \frac{1}{4|\bar{\Delta}_{ab}|^2 \bar{\Delta}_{bc}^*}$$

巨克尔效应

- 三能级系统中，克尔系数 $\chi^{(3)}$ 对失谐量 Δ_{ab} 非常敏感
- 较小 $\Delta_{ab} \rightarrow$ 增大 $\chi^{(3)}$
- 减小 Δ_{ab} 会增大介质对光场的吸收

$$\chi^{(1)} \approx 2 \frac{N}{V} \frac{|\mu_{ab}^2|}{\epsilon_0 \hbar} c_b \rightarrow \frac{N}{V} \frac{|\mu_{ab}|^2}{\epsilon_0 \hbar} \frac{\Delta_{ab} + i\Gamma_b/2}{|\Delta_{ab}|^2 + \Gamma_b^2/4}$$

- 当 $\Delta_{ab} \rightarrow 0$ 时，介质的吸收系数正比于 Γ_b^{-1}

如何增强克尔效应的同时减小耗散？

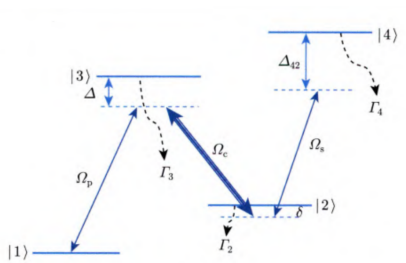
如何增强克尔效应的同时减小耗散？



利用电磁诱导透明 (EIT) 使光场无损耗通过介质

巨克尔效应

N -型能级结构:



$$\hat{H}/\hbar = \left(\Delta - \frac{i}{2}\Gamma_3\right) |3\rangle\langle 3| + \left(\delta - \frac{i}{2}\Gamma_2\right) |2\rangle\langle 2| + \left(\Delta_{42} - \frac{i}{2}\Gamma_4\right) |4\rangle\langle 4| \\ - \frac{1}{2} (\Omega_p |3\rangle\langle 1| + \Omega_c |3\rangle\langle 2| + \Omega_s |4\rangle\langle 2| + \text{H. c.})$$

巨克尔效应

薛定谔方程

$$\begin{aligned}i\dot{c}_1 &= -\frac{1}{2}\Omega_p^*c_3 \\i\dot{c}_2 &= -\frac{1}{2}(\Omega_c^*c_3 + \Omega_s^*c_4) + \bar{\delta}c_2 \\i\dot{c}_3 &= -\frac{1}{2}(\Omega_p c_1 + \Omega_c c_2) + \bar{\Delta}c_3 \\i\dot{c}_4 &= -\frac{1}{2}\Omega_s c_2 + \bar{\Delta}_{42}c_4\end{aligned}$$

其中 $\bar{\delta} = \delta - i\Gamma_2/2$, $\bar{\Delta} = \Delta - i\Gamma_3/2$, $\bar{\Delta}_{42} = \Delta_{42} - i\Gamma_4/2$

弱激发下, 系统稳态解

$$c_3 \approx \frac{4\bar{\delta}\bar{\Delta}_{42} - |\Omega_s|^2}{8\bar{\Delta}\bar{\delta}\bar{\Delta}_{42} - 2\bar{\Delta}|\Omega_s|^2 - 2\bar{\Delta}_{42}|\Omega_c|^2}\Omega_p$$

巨克尔效应

双光子共振时 $\delta = 0$

$$c_3 \approx \frac{|\Omega_s|^2 \Omega_p}{2\bar{\Delta}|\Omega_s|^2 + 2\bar{\Delta}_{42}|\Omega_c|^2}$$

- $c_3 \propto |\Omega_s|^2 \Omega_p$, 也就是没有一阶极化系数
- 考虑控制光远大于信号光 $|\Omega_c| \gg |\Omega_s|$

$$c_3 \approx \frac{|\Omega_s|^2 \Omega_p}{|\Omega_c|^2} \frac{1}{2\Delta_{42} - i\Gamma_4}$$

- 当 $\Delta_{42} \gg \Gamma_4$, 三阶非线性极化系数

$$\chi^{(3)} \approx \frac{N}{V} \frac{|\mu_{13}|^2 |\mu_{24}|^2}{\epsilon_0 \hbar} \frac{1}{|\Omega_c|^2} \left(\frac{1}{\Delta_{42}} + i \frac{\Gamma_4}{2\Delta_{42}^2} \right)$$

$|\Omega_c|^2$ 取代了 $4\Delta_{ab}^2$

- 可以通过调控 Δ_{ab} 来调节非线性效应和吸收系数
- 实验中, 一般 $|\Omega_c|^2$ 比 $4\Delta_{ab}^2$ 小好几个量级
→ 高强度的克尔效应

第五章

约化系统中的动力学演化

共振荧光

暗态和电磁诱导透明效应 (EIT)
巨克尔效应

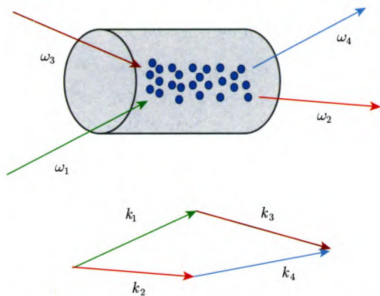
四波混频

总结

四波混频

3 个电磁场相互耦合生成第 4 中辐射光场

- four-wave mixing (FWM)
- 20 世纪 60 年代
- 简并四波混频、受激拉曼散射、非线性克尔效应



$$\omega_4 = \omega_1 - \omega_2 + \omega_3, \quad k_4 = k_1 - k_2 + k_3$$

极化率

$$\mathbf{P} = \chi^{(1)} \mathbf{E} + \chi^{(2)} \mathbf{E}\mathbf{E} + \chi^{(3)} \mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E}$$

- $\chi^{(3)}$ 有 4 个下标, 共 81 个分量

$$P_i(\omega_4, \mathbf{r}) = \frac{1}{2} \chi_{ijkl}^{(3)}(-\omega_4, \omega_1, -\omega_2, \omega_3) \mathcal{E}_j(\omega_1) \mathcal{E}_k^*(\omega_2) \mathcal{E}_l(\omega_3) e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \cdot \mathbf{r} - i\omega_4 t} + c.c.$$

第五章

约化系统中的动力学演化

共振荧光

暗态和电磁诱导透明效应 (EIT)
巨克尔效应

四波混频

总结