量子力学简介

黄月新

大湾区大学理学院

2024 年 10 月 21 日

Outline

四大公设

- **波函数公设**

  一个粒子的状态可以用一个波函数描述

- **算符公设**

  任何一个可观测量都可以用一个线性厄米 (Hermite) 算符表示

- **测量公设**

  一个微观粒子处在波函数 $\psi(x)$ 的状态，若实验对可观测量 A 进行测量，得到的是它的期望值

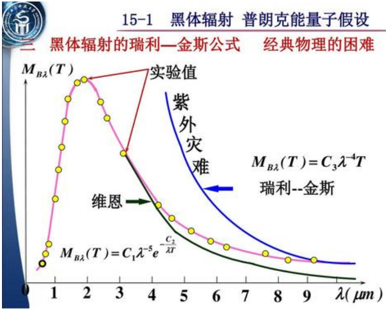
$$\langle A \rangle = \int \psi^*(x) A \psi(x) \, \mathrm{d}x$$

- **薛定谔方程公设**

  一个微观粒子的状态波函数满足薛定谔 (Schrödinger) 方程

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = H(\mathbf{r}, \mathbf{p})\psi(\mathbf{r}, t) = H(\mathbf{r}, -i\hbar\nabla)\psi(\mathbf{r}, t)$$

黑体辐射



- 基尔霍夫定律：一个物体的单色辐射密度只是波长和温度的函数，与物质的性质无关
- 维恩公式，短波区符合很好

$$J_\lambda(T) = c_1\lambda^{-5}e^{-\frac{c_2}{\lambda T}}$$

- 瑞利-金斯公式，长波区符合很好

$$J_\lambda(T) = 2\pi c_3 kT\lambda^{-4}$$

黑体辐射

1900 年，Planck 假设黑体辐射空腔中振子的振动能量和振子的频率成正比并且只能取离散值

$$0, \quad h\nu, \quad 2h\nu, \quad \ldots$$

由经典统计物理分布，上述能级对应的比例系数为

$$1, \quad e^{-h\nu\beta}, \quad e^{-2h\nu\beta}, \quad \ldots$$

统计平均

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_v &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu e^{-nh\nu\beta}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nh\nu\beta}} = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nh\nu\beta}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial\beta}\ln\left(1-e^{-h\nu\beta}\right) = \frac{h\nu}{e^{h\nu\beta}-1}\end{aligned}$$

再乘以单位体积频率 ν 附近单位频率间隔内电磁驻波振子数目 $N_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\,\mathrm{d}\nu$

$$B_\nu(\nu,T)\mathrm{d}\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/(k_BT)}-1}\mathrm{d}\nu$$

$$B_\lambda(\lambda,T)\mathrm{d}\lambda = \frac{8\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/(\lambda k_BT)}-1}\mathrm{d}\lambda$$

光的粒子性

- 光电效应

$$h\nu = \Phi_0 + \frac{1}{2} m_{\text{electron}} v_{\text{max}}^2$$

- 光子等效质量

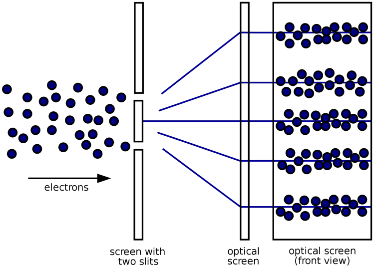
$$m^* = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2}$$

- 光的红移：光子垂直向上飞行一段距离 H

$$h\nu_0 = h\nu + m^* gH$$

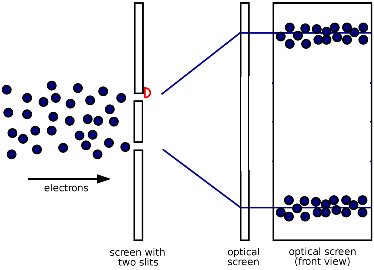
在 1960 年由 R. V. Pound 和 G. A. Rebka Jr. 观测到

双缝干涉实验



形成干涉: $$p(r) = |\phi_1(r) + \phi_2(r)|^2$$

双缝干涉实验



如果在一条缝放置一个探测器，探测电子是否从这里通过，电子将会从叠加态坍缩，在屏幕上不再形成干涉条纹

波粒二象性 (Wave-particle duality)

- de Broglie 波

$$E = h\nu = \hbar\omega, \quad p = \frac{h}{\lambda}$$

- Feynman: 杨氏双缝实验处于量子力学的心脏地位

  每个电子都从两缝同时过去，两条路径的两个态在屏上相干叠加
- 微观粒子既有波的性质也有粒子的性质—波粒二象性

不确定关系

$$\left(\langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2\right)\left(\langle B^2\rangle - \langle B\rangle^2\right) \geq \frac{1}{4}|\langle[A, B]\rangle|^2$$

不确定关系

$$\langle A^2 \rangle \langle B^2 \rangle \geq \frac{1}{4} |\langle [A, B] \rangle|^2$$

不确定关系

$$\left\langle A^2\right\rangle\left\langle B^2\right\rangle \geq \frac{1}{4}\left|\langle[A, B]\rangle\right|^2$$

Proof. 由 Schwarz 不等式

$$\left\langle A^2\right\rangle\left\langle B^2\right\rangle \geq \left|\langle AB\rangle\right|^2$$

不确定关系

$$\langle A^2 \rangle \langle B^2 \rangle \geq \frac{1}{4} |\langle [A, B] \rangle|^2$$

Proof. 由 Schwarz 不等式

$$\langle A^2 \rangle \langle B^2 \rangle \geq |\langle AB \rangle|^2$$

右边可以化为

$$AB = \frac{1}{2}(AB + BA) + \frac{1}{2}(AB - BA)$$

不确定关系

$$\left\langle A^2\right\rangle\left\langle B^2\right\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle|^2$$

Proof. 由 Schwarz 不等式

$$\left\langle A^2\right\rangle\left\langle B^2\right\rangle \geq |\langle AB\rangle|^2$$

右边可以化为

$$\langle AB\rangle = \frac{1}{2}\underbrace{\langle(AB+BA)\rangle}_{\text{purely real}} + \frac{1}{2}\underbrace{\langle(AB-BA)\rangle}_{\text{purely imag}}$$

不确定关系

$$\langle A^2\rangle \langle B^2\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle [A,B]\rangle|^2$$

Proof. 由 Schwarz 不等式

$$\langle A^2\rangle \langle B^2\rangle \geq |\langle AB\rangle|^2$$

右边可以化为

$$\langle AB\rangle = \frac{1}{2}\underbrace{\langle (AB+BA)\rangle}_{\text{purely real}} + \frac{1}{2}\underbrace{\langle (AB-BA)\rangle}_{\text{purely imag}}$$

$$\Longrightarrow |\langle AB\rangle|^2 = \frac{1}{4}|\langle \{A,B\}\rangle|^2 + \frac{1}{4}|\langle [A,B]\rangle|^2$$

$$\langle A^2\rangle\langle B^2\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle|^2$$

Proof. 由 Schwarz 不等式

$$\langle A^2\rangle\langle B^2\rangle \geq |\langle AB\rangle|^2$$

右边可以化为

$$\langle AB\rangle = \frac{1}{2}\underbrace{\langle(AB+BA)\rangle}_{\text{purely real}} + \frac{1}{2}\underbrace{\langle(AB-BA)\rangle}_{\text{purely imag}}$$

$$\Longrightarrow |\langle AB\rangle|^2 = \frac{1}{4}|\langle\{A,B\}\rangle|^2 + \frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle|^2$$

所以有

$$\langle A^2\rangle\langle B^2\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle\{A,B\}\rangle|^2 + \frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle|^2$$

不确定关系

平面波: $e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-Et)/\hbar}$

不确定关系

平面波: $e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-Et)/\hbar}$

$$\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}$$

不确定关系

$$
\begin{aligned}
[\hat{x}, \hat{p}_x] &= -\hat{x} i\hbar \frac{\partial}{\partial x} + i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} = i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{x} - \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} \right) \\
&= i\hbar
\end{aligned}
$$

不确定关系

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = -\hat{x} i\hbar \frac{\partial}{\partial x} + i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} = i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{x} - \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} \right)$$
$$= i\hbar$$

$$\rightarrow \Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

不确定关系

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = -\hat{x} i\hbar \frac{\partial}{\partial x} + i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\hat{x} = i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{x} - \hat{x}\frac{\partial}{\partial x}\right)$$
$$= i\hbar$$

$$\rightarrow \Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

- $\Delta E \Delta t \geq \hbar$

$$\begin{cases} \Delta E = v_x p_x, \quad \Delta t = \Delta x / v_x \\ \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, t\right] = i\hbar \end{cases}$$

- **振子系统** $\Delta n \Delta \phi \geq 1$

$$\Delta E = \Delta n \hbar \omega, \quad \delta \phi = \omega \Delta t$$

薛定谔方程

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r},t) = \hat{H}\Psi(\mathbf{r},t)$$

- H 是厄米矩阵

$$H^\dagger = H$$

$\rightarrow H$ 的本征值都是实数

$$U^\dagger H U = H_D, \quad UU^\dagger = U^\dagger U = 1$$

- 对薛定谔方程作么正变换

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(U^\dagger\Psi\right) = H_D\left(U^\dagger\Psi\right) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & & \\ & \varepsilon_2 & & \\ & & \varepsilon_3 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}(U^\dagger\Psi)$$

$$\Psi(t) = U\begin{pmatrix} e^{-i\varepsilon_1 t/\hbar} & & & \\ & e^{-i\varepsilon_2 t/\hbar} & & \\ & & e^{-i\varepsilon_3 t/\hbar} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}U^\dagger\Psi(t=0)$$

薛定谔方程

Dirac 符号 (bra-ket 符号)

右矢 (ket)—列矢量

$$|\phi\rangle = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}$$

左矢 (bra)—横矢量

$$\langle\phi| = \begin{pmatrix} \phi_1^* & \phi_2^* & \dots & \phi_n^* \end{pmatrix}$$

薛定谔方程

Dirac 符号 (bra-ket 符号)

右矢 (ket)—列矢量

$$|\phi\rangle = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}$$

左矢 (bra)—横矢量

$$\langle\phi| = \begin{pmatrix} \phi_1^* & \phi_2^* & \dots & \phi_n^* \end{pmatrix}$$

- $(|\phi\rangle)^\dagger = \langle\phi|$
  若 $H = H^\dagger$

$$H\,|\phi_n\rangle = \varepsilon_n\,|\phi_n\rangle \to \langle\phi_n|\,H^\dagger = \langle\phi_n|\,\varepsilon_n^* \to \langle\phi_n|H|\phi_n\rangle = \varepsilon_n = \varepsilon_n^*$$

所以 $\varepsilon_n = \varepsilon_n^*$ **只能是实数**

薛定谔方程

Dirac 符号 (bra-ket 符号)

右矢 (ket)—列矢量

$$|\phi\rangle = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}$$

左矢 (bra)—横矢量

$$\langle\phi| = \begin{pmatrix} \phi_1^* & \phi_2^* & \dots & \phi_n^* \end{pmatrix}$$

- $(|\phi\rangle)^\dagger = \langle\phi|$
  若 $H = H^\dagger$

$$H\,|\phi_n\rangle = \varepsilon_n\,|\phi_n\rangle \to \langle\phi_n|\,H^\dagger = \langle\phi_n|\,\varepsilon_n^* \to \langle\phi_n|H|\phi_n\rangle = \varepsilon_n = \varepsilon_n^*$$

所以 $\varepsilon_n = \varepsilon_n^*$ 只能是实数

- 内积: $\langle\phi|\phi\rangle$, $\langle\phi|\psi\rangle$

归一化 $\langle\phi_n|\phi_n\rangle = 1$; 正交性 $\langle\phi_n|\phi_m\rangle = \delta_{mn}$

- 算符期望: $\langle\phi_n|A|\phi_n\rangle$

平方差: $\quad \Delta A = \langle\phi_n|A^2|\phi_n\rangle - \langle\phi_n|A|\phi_n\rangle^2$

- 组成算符: $|\phi\rangle\langle\psi|$

完备空间 $\sum_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n| = I_n$

薛定谔方程

把波函数在 H 的本征基矢下展开

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n |\phi_n\rangle \langle\phi_n|\Psi(t)\rangle \equiv \sum_n c_n(t)\,|\phi_n\rangle$$

代入薛定谔方程

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\sum_n c_n(t)\,|\phi_n\rangle = H\sum_n c_n(t)\,|\phi_n\rangle = \sum_n \varepsilon_n c_n(t)\,|\phi_n\rangle$$

上式左乘上 $\langle\phi_m|$，得到

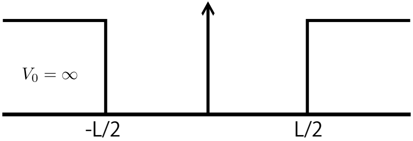
$$i\hbar\dot{c}_m(t) = \varepsilon_m c_m(t) \Longrightarrow c_m(t) = e^{-i\varepsilon_m t/\hbar}c_m(0)$$

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n e^{-i\varepsilon_n t/\hbar}c_n(0)\,|\phi_n\rangle$$

薛定谔方程

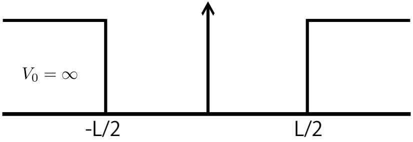
定态薛定谔方程: $H\left|\phi_n\right\rangle = E_n\left|\phi_n\right\rangle$

一维方势阱



$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x), \quad V(x) = \begin{cases} 0, & -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2} \\ V_0, & x \leq -\frac{L}{2} \quad \text{or} \quad x \geq \frac{L}{2} \end{cases}$$

一维方势阱



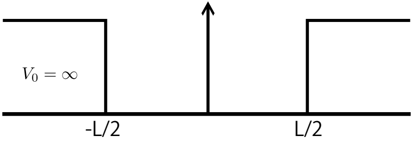
$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x), \quad V(x) = \begin{cases} 0, & -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2} \\ V_0, & x \leq -\frac{L}{2} \quad \text{or} \quad x \geq \frac{L}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x) = E\psi(x), & |x| < \frac{L}{2} \\ \psi(x) = 0, & |x| \geq \frac{L}{2} \end{cases}$$

在 $|x| < L/2$ 有通解

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

一维方势阱



$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x), \quad V(x) = \begin{cases} 0, & -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2} \\ V_0, & x \le -\frac{L}{2} \quad \text{or} \quad x \ge \frac{L}{2} \end{cases}$$

边界条件:

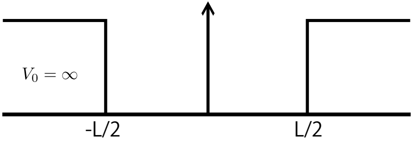
$$\begin{cases} Ae^{ikL/2} + Be^{-ikL/2} = 0 \\ Ae^{-ikL/2} + Be^{ikL/2} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (A+B)\cos\frac{kL}{2} = 0 \\ (A-B)\sin\frac{kL}{2} = 0 \end{cases}$$

得到

$$A + B = \mathcal{N}_1 \sin\frac{kL}{2}, \quad A - B = \mathcal{N}_2 \cos\frac{kL}{2}, \quad kL = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\psi(x) = \mathcal{N}_1 \sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi x}{L} + i\mathcal{N}_2 \cos\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi x}{L}$$

一维方势阱



$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x), \quad V(x) = \begin{cases} 0, & -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2} \\ V_0, & x \leq -\frac{L}{2} \quad \text{or} \quad x \geq \frac{L}{2} \end{cases}$$

边界条件:

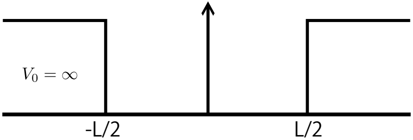
$$\begin{cases} Ae^{ikL/2} + Be^{-ikL/2} = 0 \\ Ae^{-ikL/2} + Be^{ikL/2} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} (A+B)\cos\frac{kL}{2} = 0 \\ (A-B)\sin\frac{kL}{2} = 0 \end{cases}$$

得到

$$A + B = \mathcal{N}_1 \sin\frac{kL}{2}, \quad A - B = \mathcal{N}_2 \cos\frac{kL}{2}, \quad kL = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

归一化: $\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi x}{L} + i\sqrt{\frac{2}{L}}\cos\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi x}{L}$

一维方势阱



$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x), \quad V(x) = \begin{cases} 0, & -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2} \\ V_0, & x \le -\frac{L}{2} \quad \text{or} \quad x \ge \frac{L}{2} \end{cases}$$

边界条件:

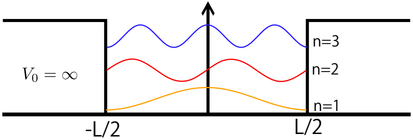
$$\begin{cases} Ae^{ikL/2} + Be^{-ikL/2} = 0 \\ Ae^{-ikL/2} + Be^{ikL/2} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} (A+B)\cos\frac{kL}{2} = 0 \\ (A-B)\sin\frac{kL}{2} = 0 \end{cases}$$

得到

$$A + B = \mathcal{N}_1 \sin\frac{kL}{2}, \quad A - B = \mathcal{N}_2 \cos\frac{kL}{2}, \quad kL = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

归一化: $$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi x}{L} + \sqrt{\frac{2}{L}}\cos\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi x}{L}$$

一维方势阱



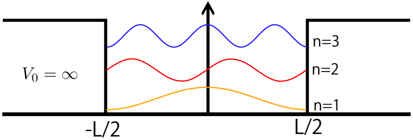
$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x), \quad V(x) = \begin{cases} 0, & -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2} \\ V_0, & x \leq -\frac{L}{2} \quad \text{or} \quad x \geq \frac{L}{2} \end{cases}$$

得到本征态和本征能量

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\frac{n\pi}{2} \cos\frac{n\pi x}{L} + \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\frac{n\pi}{2} \sin\frac{n\pi x}{L}, & |x| < \frac{L}{2} \\ 0, & |x| \geq \frac{L}{2} \end{cases}$$

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

一维方势阱



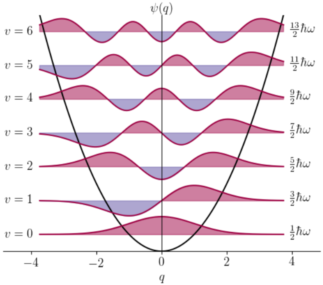
- $n = 1, 3, 5, \ldots$ 时，波函数是偶函数；$n = 2, 4, 6, \ldots$ 时，波函数是奇函数
- $\bar{x} = 0$, $\bar{p} = 0$

$$\int_{-L/2}^{L/2} \psi^*(x) x \psi(x) \, \mathrm{d}x = 0, \qquad \int_{-L/2}^{L/2} \psi^*(x) i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) \, \mathrm{d}x = 0$$

- 基态 $n = 1$ 能量不等于 $0 \rightarrow$ 粒子不会静止

If V_0 is finite?

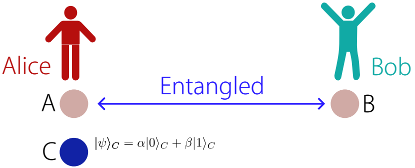
一维谐振子



$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

$$E_\nu = \hbar\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \quad \nu = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

量子通信 (Quantum teleportation)



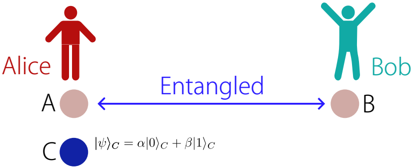
- 光子 A 和 B 处在一个最大纠缠态

$$\left|\Phi^+\right\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B\right)$$

- Alice 要把光子 C 的量子态传送到 Bob 的光子 B 上

$$|\psi\rangle_C \otimes \left|\Phi^+\right\rangle_{AB} = \left(\alpha\,|0\rangle_C + \beta\,|1\rangle_C\right) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B\right)$$

量子通信 (Quantum teleportation)



把 Alice 手上的两个光子态在 Bell 基下展开:

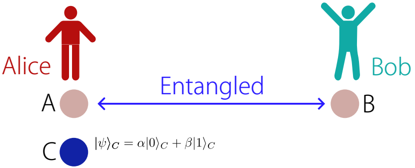
$$|0\rangle \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\Phi^+\right\rangle + \left|\Phi^-\right\rangle\right),$$

$$|0\rangle \otimes |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\Psi^+\right\rangle + \left|\Psi^-\right\rangle\right),$$

$$|1\rangle \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\Psi^+\right\rangle - \left|\Psi^-\right\rangle\right),$$

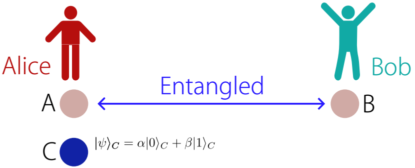
$$|1\rangle \otimes |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\Phi^+\right\rangle - \left|\Phi^-\right\rangle\right),$$

量子通信 (Quantum teleportation)



$$
\begin{aligned}
|\psi\rangle_C \otimes |\Phi^+\rangle_{AB} = \frac{1}{2}\Big[& |\Phi^+\rangle_{CA} (\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B) \\
& + |\Phi^-\rangle_{CA} (\alpha|0\rangle_B - \beta|1\rangle_B) \\
& + |\Psi^+\rangle_{CA} (\alpha|1\rangle_B + \beta|0\rangle_B) \\
& + |\Psi^-\rangle_{CA} (\alpha|1\rangle_B - \beta|0\rangle_B) \Big]
\end{aligned}
$$

- Alice 对手上的光子 A 和 C 进行 Bell 基测量，量子态将以相同的概率坍缩 collapse)到四个可能之一



Alice 可以通过其它通道把测量得到的结果告诉 Bob

- 如果结果是 $|\Phi^+\rangle$，Bob 不需要进行任何操作，光子 B 即处于 $|\psi\rangle$ 态
- 如果结果是 $|\Phi^-\rangle$，光子 B 处 $\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle$ 态，Bob 再进行一个 $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 的操作
- 如果结果是 $|\Psi^+\rangle$，Bob 需要进行一次 $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 的操作
- 如果结果是 $|\Psi^+\rangle$，Bob 需要进行一次 $i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 操作

全同性原理 (identical principle)

在量子力学中，把属于同一类的粒子称为全同粒子，也就是说固有性质 (质量、电荷、自旋、同位旋、宇称、奇异数等) 相同的粒子称为全同粒子。

$$P_{ij}\psi(\ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots) = \psi(\ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots)$$

全同性原理 (identical principle)

在量子力学中，把属于同一类的粒子称为全同粒子，也就是说固有性质 (质量、电荷、自旋、同位旋、宇称、奇异数等) 相同的粒子称为全同粒子。

$$P_{ij}\psi(\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots)=\psi(\ldots,x_j,\ldots,x_i,\ldots)$$

- 全同性原理下，波函数模平方不变

$$P_{ij}\psi(\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots)=e^{i\delta_{ij}}\psi(\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots)$$

全同性原理认为每个粒子都是一模一样，原则上 δ_{ij} 应该与其下标无关，若 P_{ij} 作用两次，即

$$P_{ji}P_{ij}\psi(\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots)=e^{2i\delta}\psi(\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots)$$

交换两次，粒子还原，所以 $e^{2i\delta}=1$

全同性原理 (identical principle)

在量子力学中，把属于同一类的粒子称为全同粒子，也就是说固有性质 (质量、电荷、自旋、同位旋、宇称、奇异数等) 相同的粒子称为全同粒子。

$$P_{ij}\psi(\ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots) = \psi(\ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots)$$

- 总波函数对于任意两个粒子置换表现出对称性和反对称性

$$\psi(\ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots) = \pm\psi(\ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots)$$

- 光子，π 介子，α 粒子等具有整数自旋粒子服从对易规则—玻色子 (Boson)
- 电子、中子、质子等具有半整数自旋粒子服从反对易规则—费米子 (Fermion)

例：有 A 和 B 两个粒子占据两个简并态 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$，可能的微观状态和对应概率为

Particles	Both $\|0\rangle$	Both $\|1\rangle$	One $\|0\rangle$ and one $\|1\rangle$
Distinguishable	0.25	0.25	0.5
Bosons	0.33	0.33	0.33
Fermions	0	0	1

四大公设

- **波函数公设**

  一个粒子的状态可以用一个波函数描述

- **算符公设**

  任何一个可观测量都可以用一个线性厄米 (Hermite) 算符表示

- **测量公设**

  一个微观粒子处在波函数 $\psi(x)$ 的状态，若实验熵对可观测量 A 进行测量，得到的是它的期望值

$$\langle A\rangle = \int \psi^*(x)A\psi(x)\,\mathrm{d}x$$

- **薛定谔方程公设**

  一个微观粒子的状态波函数满足薛定谔 (Schrödinger) 方程

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = H(\mathbf{r},\mathbf{p})\psi(\mathbf{r},t) = H(\mathbf{r},-i\hbar\nabla)\psi(\mathbf{r},t)$$

经典力学

- 测量可以不干扰被测对象
- 几何点、质点、轨道
- 粒子的运动状态可以由当时刻的位置和动量唯一确定

总结

波函数，概率与不确定性，等级量子化，叠加态，纠缠，测量与坍缩

- 量子力学四大公设
- 实验基础：粒子性质，波性质
- 不确定关系
- 薛定谔方程
- 量子通信